Halbeinfache und Nilpotente Orbiten

Jendrik Stelzner

Geboren am 1. September 1992 in Essen

31. Juli 2015

Bachelorarbeit Mathematik

Betreuerin: Prof. Dr. Catharina Stroppel

Zweitgutachter: Dr. Olaf Schnürer

Mathematisches Institut

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät der

Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Ein wichtiges Hilfsmittel zur Untersuchung eines Endomorphismus $F \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ eines n-dimenisonalen komplexen Vektorraum V ist seine Jordannormalform, durch die dieser als Summe $F = F_s + F_n$ eines diagonalisierbaren Endomorphismus F_s und nilpotenten Endomorphismus F_n geschrieben wird, so dass F_s und F_n kommutieren. Für eine endlichdimensionale komplexe, reduktive Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ergibt sich damit für jedes $X \in \mathfrak{g}$ eine analoge Zerlegung $X = X_s + X_n$, die abstrakte Jordanzerlegung, und damit auch ein Konzept halbeinfacher und nilpotenter Elemente.

Halbeinfache und nilpotente Elemente in $\mathfrak{g}$ zeichen sich dadurch aus, dass sie bezüglich der adjungierten Darstellung von $\mathfrak{g}$ durch eine diagonalisierbare, bzw. nilpotente Derivation auf $\mathfrak{g}$ wirken. Über diese Wirkungen lässt sich auch die Wirkung von X auf $\mathfrak{g}$ verstehen, woraus wir anschließend Rückschlüsse auf X selbst ziehen können. Es ist daher begehrenswert, die halbeinfachen und nilpotenten Elemente in $\mathfrak{g}$ möglichst gut zu verstehen.

Ein mögliches Idee hierfür ergibt sich aus der linearen Algebra: Statt den Endomorphismen in $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ selbst betrachtet man dort ihre Konjugationsklassen unter $\mathrm{GL}(V)$ und stellt diese durch ausgezeichnete Normalformen oder ausgewählte Parametrisierungen da. So lassen sich etwa die Konjugationsklassen der diagonalisierbarer Endomorphismen in $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ durch $\mathbb{C}^n/S_n$ parametrisieren, indem der Orbit $[(a_1, \ldots, a_n)] \in \mathbb{C}^n/S_n$ die Konjugationsklasse der diagonalisierbaren Endomorphismen mit Eigenwerten $a_1, \ldots, a_n$ repräsentiert. Identifiziert man zusätzlich $\mathfrak{gl}(V)$ mit $\mathfrak{gl}_n(k)$, so ergeben sich die Diagonalmatrizen als Normalform der diagonalisierbaren Elemente. Die nilpotenten Elemente lassen sich in ähnlicher Weise über ihre Jordannormalform verstehen.

Es ist nun naheliegend, dieses Verfahren für die abstrakte Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ zu verallgemeinern. Hierfür benötigen wir eine Gruppenwirkung auf $\mathfrak{g}$, sowie Repräsentantensysteme für die halbeinfachen und nilpotenten Elemente. Für die halbeinfachen Elemente etwa ist es als typische Verallgemeinerung der Diagonalmatrizen naheliegend, eine Cartan-Unteralgebra zu betrachten. Mit diesem Gedanken im Hinterkopf zeigen wir in Kapitel 2, dass sich die Klassifikation der Konjugationsklassen diagonalisierbarer Endomorphismen aus $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ durch die Wahl einer passenden Gruppenwirkung auf $\mathfrak{g}$ und einer beliebigen Cartan-Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ direkt zu einer Klassifikation der G-Orbiten halbeinfacher Elemente in $\mathfrak{g}$ verallgemeinert. Dabei orientieren wir uns in unserem Vorgehen an [CM93].

Das Problem an dieser Verallgemeinerung besteht darin, dass die Wahl einer Gruppenwirkung und einer Cartan-Unteralgebra erfordert, und es für diese im Allgemeinen keine ausgezeichneten Kandidaten gibt. Betrachten wir statt einer abstrakten Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ aber konkrete Beispiele, wie etwa $\mathfrak{gl}_n(k)$, $\mathfrak{so}_n(k)$ oder $\mathfrak{sp}_{2n}(k)$, so ergibt sich häufig eine naheliegende Gruppenwirkung. Für $\mathfrak{gl}_n(k)$ etwa haben wir die Konjugationswirkung durch $\mathrm{GL}_n(k)$, für $\mathfrak{so}_n(k)$ die Konjugationswirkung durch die orthogonale Gruppe $\mathrm{O}_n(k)$ oder spezielle orthogonale Gruppe $\mathrm{SO}_n(k)$ und für $\mathfrak{sp}_{2n}(k)$ die Konjugationswirkung durch die symplektische $\mathrm{Sp}_{2n}(k)$. Als Anwendung der in Kapitel 2 entwickelten Klassifikation bestimmen wir daher in Kapitel 3 die Orbiten halbeinfacher Elemente in diesen Lie-Algebren unter den obigen Gruppenwirkungen. Im Vergleich zu der Parametrisierung k^n/S_n für die Konjugationsklassen diagonalsierbarer Endomorphismen in $\mathfrak{gl}(V)$ erhalten wir dabei für die Orbiten in $\mathfrak{so}_n(k)$ und $\mathfrak{sp}_n(k)$ Parametrisierungen der Formen $k^n/(\mathbb{Z}_2^n \rtimes S_n)$ und $k^n/(\mathbb{Z}_2^{n-1} \rtimes S_n)$.

Als eine Verallgemeinerung der Klassifikation von Konjugationsklassen nilpotenter Endomorphismen in $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ mithilfe der Jordannormalform, leiten wir schließlich in Kapitel 4 aus den Wundern der $\mathfrak{sl}_2$-Theorie eine Klassifikation der Orbiten nilpotenter Elemente in $\mathfrak{g}$ her, auch hier bezüglich passender Gruppenwirkungen. Auch hierbei orientieren wir uns an [CM93].

Dabei besteht der Anspruch dieser Arbeit nicht in einer inhaltlichen Neuerung, sondern an einer der genutzen Methoden. Statt den Problemen mit der abstrakten Maschinerie der Lie-Gruppen zu begegnen, wie es etwa in [CM93] geschieht, behandeln wir sie mit den grundlegenden Konzepten der linearen Algebra sowie einem gewissen Grundwissen der Darstellungstheorie komplexer Lie-Algebren. Ein entscheidender Teil der Arbeit liegt dabei in dem Berechnen konkreter Beispiele und der damit verbundenen Veranschaulichung der entwickelten Methoden.

Mein Dank gilt zunächst Prof. Catharina Stroppel, die mich auf das Thema dieser Arbeit aufmerksam gemacht hat, und mich während des Erstellens der Arbeit begleitet hat. Ich danke außerdem meinen Kommilitonen Mark Pedron und Chiara Mazziotta für das Probelesen dieser Arbeit und ihre ständigen Verbesserungsvorschläge.

1 Vorbereitung

In diesem Kapitel erinnern wir an einige der benötigten Grundlagen aus der Theorie der Lie-Algebren und entwickeln vorbereitende Ergebnisse, die wir in den folgenden Kapiteln anwenden.

Dabei bewegen wir uns in diesem, sowie in allen weiteren Kapiteln, stets über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k der Charakteristik 0. Alle von uns betrachteten Lie-Algebren und Vektorräume befinden sich dabei, sofern nicht anders angegeben, über diesem Grundkörper k, und mit einer Lie-Algebra meinen wir stets eine endlichdimensionale Lie-Algebra.

1.1 Notationen und Grundlagen

Dieser Abschnitt dient in erster Linie zur Einführung von Notationen. In Folge dessen erinnern wir an einige grundlegende Aussagen der Theorie endlichdimensionaler Lie-Algebren, die aber ansonsten als bekannt vorausgesetzt werden. Sofern benötigt finden sich die entsprechenden Details in [Hum72, §1 – §3].

1.1.1 Grundlegende Begriffe

Mit $\mathbb{Z}$ bezeichnen wir die Menge der ganzen Zahlen, mit $\mathbb{N} = \mathbb{Z}_{\geq 0}$ die Menge der nicht-negativen ganzen Zahlen, und mit $\mathbb{Q}$ die Menge der rationalen Zahlen. Mit $\mathbb{Z}_2$ bezeichnen wir die multiplikative Gruppe mit zwei Elementen, und wir realisieren diese als Untergruppe $\{1, -1\} \subseteq k^\times$. Mit $\delta_{i,j} = \delta(i,j)$ bezeichnen wir das Kronecker-Delta.

Für $n \in \mathbb{N}_{>0}$ bezeichnet $\mathrm{M}_n(k)$ den Vektorraum der $(n \times n)$-Matrizen über k. Für $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in k$ seien

$$\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \coloneqq \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(k)$$

sowie

$$\operatorname{adiag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \coloneqq \begin{pmatrix} & & \lambda_1 \\ & \iddots & \\ \lambda_n & & \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(k).$$

Insbesondere seien

$$I_n \coloneqq \operatorname{diag}(1, \ldots, 1) \in \mathrm{M}_n(k) \quad \text{und} \quad J_n \coloneqq \operatorname{adiag}(1, \ldots, 1) \in \mathrm{M}_n(k).$$

Sofern ausreichend klar ist, um welche Größe n es sich handelt, schreiben wir auch nur I und J. Eine Diagonalmatrix heißt *regulär*, falls ihre Diagonaleinträge paarweise verschieden sind.

Für $n \in \mathbb{N}_{>0}$ bezeichnet $\mathrm{D}_n(k) \subseteq \mathrm{GL}_n(k)$ die Untergruppe der invertierbaren Diagonalmatrizen und $\mathrm{P}_n(k) \subseteq \mathrm{GL}_n(k)$ die Untergruppe der Permutationsmatrizen. Eine *Monomialmatrix* ist eine Matrix $S \in \mathrm{M}_n(k)$, die in jeder Zeile und jeder Spalte genau einen Eintrag hat, der verschieden von 0 ist. Monomialmatrizen sind invertierbar und bilden eine Untergruppe $\mathrm{Mon}_n(k) \subseteq \mathrm{GL}_n(k)$. Es sind $\mathrm{D}_n(k), \mathrm{P}_n(k) \subseteq \mathrm{Mon}_n(k)$ mit

$$\mathrm{Mon}_n(k) = \mathrm{D}_n(k) \rtimes \mathrm{P}_n(k),$$

wobei $\rtimes$ das innere semidirekte Produkt mit Normalteiler auf der linken Seite bezeichnet. Diese Zerlegung entspricht einer kurzen exakten Sequenz

$$0 \to \mathrm{D}_n(k) \to \mathrm{Mon}_n(k) \to \mathrm{P}_n(k) \to 0$$

mit Schnitt $\mathrm{P}_n(k) \hookrightarrow \mathrm{Mon}_n(k)$.

Für einen Vektorraum V bezeichnet $\mathrm{GL}(V)$ die Gruppe der k-linearen Automorphismen von V und $\mathrm{SL}(V) = \{\phi \in \mathrm{GL}(V) \mid \det \phi = 1\}$ die k-linearen Automorphismen von Determinante 1. Ferner bezeichnet $\mathfrak{gl}(V)$ die *lineare Lie-Algebra über V*, d.h. der Vektorraum $\mathrm{End}_k(V)$ zusammen mit dem Kommutator

$$[f, g] = f \circ g - g \circ f \quad \text{für alle } f, g \in \mathrm{End}_k(V)$$

als Lie-Klammer, und $\mathfrak{sl}(V) \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ die Unteralgebra der spurlosen Endomorphismen.

Ein *Homomorphismus* $\mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ zwischen Lie-Algebren $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$ meint stets einen Homomorphismus von Lie-Algebren. Für eine Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ bezeichnet $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ die Gruppe der Lie-Algebra-Automorphismen von $\mathfrak{g}$, d.h.

$$\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g} = \{\phi \in \mathrm{GL}(\mathfrak{g}) \mid \phi \text{ ist ein Homomorphismus}\}.$$

Mit einer *Unteralgebra* von $\mathfrak{g}$ meinen wir stets eine Lie-Unteralgebra.

Die *adjungierte Darstellung* von $\mathfrak{g}$ ist der Homomorphismus

$$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}), \quad X \mapsto (Y \mapsto [X, Y]).$$

$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} X$ ist nach der Jacobi-Identität für alle $X \in \mathfrak{g}$ eine *Derivation* von $\mathfrak{g}$, d.h.

$$(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} X)[Y, Z] = [(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} X)(Y), Z] + [Y, (\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} X)(Z)] \quad \text{für alle } X, Y, Z \in \mathfrak{g}.$$

Sofern ausreichend klar ist, über welcher Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ wir uns bewegen, schreiben wir auch nur ad anstelle von $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$.

Für $n \in \mathbb{N}_{>0}$ bezeichnet $\mathfrak{gl}_n(k)$ bezeichnet die *allgemeine lineare Lie-Algebra*, also den Vektorraum $\mathrm{M}_n(k)$ zusammen mit dem Kommutator

$$[A, B] = AB - BA \quad \text{für alle } A, B \in \mathrm{M}_n(k)$$

als Lie-Klammer. Außerdem bezeichnet $\mathfrak{sl}_n(k) \subseteq \mathfrak{gl}_n(k)$ die *spezielle lineare Lie-Algebra*, d.h. die Unteralgebra der spurlosen Matrizen. Es bezeichnet $\mathfrak{d}_n(k) \subseteq \mathfrak{gl}_n(k)$

die Unteralgebra der Diagonalmatrizen, $\mathfrak{t}_n(k) \subseteq \mathfrak{gl}_n(k)$ die Unteralgebra der oberen Dreiecksmatrizen und $\mathfrak{n}_n(k) \subseteq \mathfrak{gl}_n(k)$ die Unteralgebra der echten oberen Dreiecksmatrizen.

Das *Zentrum* einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ist

$$Z(\mathfrak{g}) \coloneqq \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, Y] = 0 \text{ für alle } Y \in \mathfrak{g}\} = \ker \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}$$

und bildet ein Ideal in $\mathfrak{g}$. Für zwei Teilmengen $I, J \subseteq \mathfrak{g}$ ist

$$[I, J] \coloneqq \operatorname{span}_k\{[X, Y] \mid X \in I, Y \in J\}.$$

Für Ideale I und J in $\mathfrak{g}$ ist nach der Jacobi-Identität auch $[I, J]$ ein Ideal in $\mathfrak{g}$. Für $S \subseteq \mathfrak{g}$ ist

$$Z_{\mathfrak{g}}(S) \coloneqq \{Y \in \mathfrak{g} \mid [X, Y] = 0 \text{ für alle } X \in S\}$$

der *Zentralisator* von S in $\mathfrak{g}$, und für ein Element $X \in \mathfrak{g}$ ist

$$\mathfrak{g}^X \coloneqq Z_{\mathfrak{g}}(X) \coloneqq Z_{\mathfrak{g}}(\{X\}) = \{Y \in \mathfrak{g} \mid [X, Y] = 0\}.$$

der *Zentralisator* von X in $\mathfrak{g}$. Nach der Jacobi-Identität ist $\mathfrak{g}^X$ für alle $X \in \mathfrak{g}$ eine Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ und somit auch $Z_{\mathfrak{g}}(S) = \bigcap_{X \in S} \mathfrak{g}^X$ für alle $S \subseteq \mathfrak{g}$.

Die *Killing-Form* $\kappa_{\mathfrak{g}} \colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to k$ einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ist definiert als

$$\kappa_{\mathfrak{g}}(X, Y) \coloneqq \operatorname{tr}(\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} X \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} Y) \quad \text{für alle } X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Die Killing-Form ist eine symmetrische Bilinearform, und in dem Sinne *assoziativ*, dass

$$\kappa_{\mathfrak{g}}(X, [Y, Z]) = \kappa_{\mathfrak{g}}([X, Y], Z) \quad \text{für alle } X, Y, Z \in \mathfrak{g}.$$

Sofern ausreichend klar ist, über welcher Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ wir uns bewegen, schreiben wir auch nur κ statt $\kappa_{\mathfrak{g}}$.

Eine Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ heißt *einfach*, falls sie nicht abelsch ist, und genau zwei Ideale enthält. Diese sind dann notwendigerweise 0 und $\mathfrak{g}$ selbst, mit $\mathfrak{g} \neq 0$. Ein Ideal $I \subseteq \mathfrak{g}$ heißt einfach, wenn es zusammen mit der Einschränkung der Lie-Klammer von $\mathfrak{g}$ eine einfache Lie-Algebra ist.

Das *Radikal* von $\mathfrak{g}$ ist das eindeutige maximale auflösbare Ideal von $\mathfrak{g}$, und wird mit $\operatorname{rad} \mathfrak{g}$ bezeichnet. Eine Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ heißt *halbeinfach* falls eine, und damit alle, der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist.

1. $\operatorname{rad} \mathfrak{g} = 0$,
2. $\mathfrak{g} = I_1 \oplus \cdots \oplus I_n$ für einfache Ideale $I_1, \ldots, I_n \subseteq \mathfrak{g}$,
3. $\kappa_{\mathfrak{g}}$ ist nicht-entartet.

Ist $\mathfrak{g}$ halbeinfach, so ist $Z(\mathfrak{g}) = 0$ und $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$. Siehe [Hum72, §5.1, §5.2] für die entsprechenden Beweise.

$\mathfrak{sl}_n(k)$ ist für alle $n \geq 1$ einfach, und damit insbesondere halbeinfach, und die *triviale Lie-Algebra* 0 ist ebenfalls halbeinfach. Bis auf Isomorphie gibt es genau eine eindimensionale Lie-Algebra sowie zwei zweidimensional Lie-Algebren, und diese sind alle auflösbar; daher ist jede halbeinfache, nicht-triviale Lie-Algebra mindestens dreidimensional.

Eine *Darstellung* einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ist ein Vektorraum V zusammen mit einem Homomorphismus $\rho\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$. Eine $\mathfrak{g}$-*Modulstruktur* auf V ist eine bilineare Abbildung $M\colon g \times V \to V, (X, v) \mapsto X \cdot v$, für die

$$[X, Y] \cdot v = X \cdot (Y \cdot v) - Y \cdot (X \cdot v) \quad \text{für alle } X, Y \in \mathfrak{g} \text{ und } v \in V. \tag{1}$$

Darstellungen von $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}$-Moduln sind in dem Sinne äquivalent, dass es für jeden Vektorraum V eine Bijektion

$$\left\{ \rho\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V) \;\middle|\; \begin{matrix} \rho \text{ ist ein Ho-} \\ \text{momorphismus} \end{matrix} \right\} \to \left\{ \begin{matrix} M\colon \mathfrak{g} \times V \to V, \\ (X, v) \mapsto X \cdot v \end{matrix} \;\middle|\; \Phi \text{ erfüllt } (1) \right\}$$
$$\rho \mapsto ((X, v) \mapsto \rho(X)(v))$$
$$(X \mapsto (v \mapsto X \cdot v)) \mapsfrom M$$

gibt. Wir werden daher im Folgenden nicht zwischen den beiden Konzepten unterscheiden.

Ein grundlegendes Resultat über die Darstellungstheorie halbeinfache Lie-Algebren ist der Satz von Weyl, ein Beweis findet sich in [Hum72, §6.3].

Theorem 1.1 (Weyl). *Ist $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Lie-Algebra und V eine endlichdimensionale Darstellung, so ist V halbeinfach, d.h. V ist die direkte Summe von irreduziblen Unterdarstellungen.*

1.1.2 Lie-Algebra einer Bilinearform

Definition 1.2. Ist V ein Vektorraum und $\beta\colon V \times V \to k$ eine Bilinearform, so seien

$$\mathfrak{o}(V, \beta) \coloneqq \{f \in \mathfrak{gl}(V) \mid \beta(f(v), w) + \beta(v, f(w)) = 0 \text{ für alle } v, w \in V\},$$

und

$$\mathrm{O}(V, \beta) \coloneqq \{\phi \in \mathrm{GL}(V) \mid \beta(\phi(v), \phi(w)) = \beta(v, w) \text{ für alle } v, w \in V\}.$$

Ist $B \in \mathrm{M}_n(k)$, so seien

$$\mathfrak{o}(B) \coloneqq \{A \in \mathfrak{gl}_n(k) \mid A^\top B + BA = 0\}$$

und

$$\mathrm{O}(B) \coloneqq \{S \in \mathrm{GL}_n(k) \mid S^\top BS = B\}.$$

Bemerkung 1.3. Ist W eine Darstellung einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$, so ist auch W^* ein Darstellung von $\mathfrak{g}$ vermöge

$$(X \cdot \varphi)(w) = -\varphi(X \cdot w) \quad \text{für alle } X \in \mathfrak{g},\ \varphi \in W^* \text{ und } w \in W,$$

und sind W_1 und W_2 Darstellungen von $\mathfrak{g}$, so ist auch $W_1 \otimes_k W_2$ eine Darstellung von $\mathfrak{g}$ vermöge

$$X \cdot (w_1 \otimes w_2) = (X \cdot w_1) \otimes w_2 + w_1 \otimes (X \cdot w_2) \quad \text{für alle } X \in \mathfrak{g},\ w_1 \in W_1 \text{ und } w_2 \in W_2.$$

In der Situation von Definition 1.2 trägt V eine naheliegende $\mathfrak{gl}(V)$-Modulstuktur, über die auch $(V \otimes_k V)^*$ in obiger Weise eine Darstellung von $\mathfrak{g}$ ist. Betrachten wir β als ein Element von $(V \otimes_k V)^*$, so gilt

$$\mathfrak{o}(V, \beta) = \{f \in \mathfrak{gl}(V) \mid f \cdot \beta = 0\}.$$

Ist V ein Vektorraum mit Bilinearform $\beta \colon V \times V \to k$, so wirkt $\mathrm{O}(V, \beta)$ durch Konjugations auf $\mathfrak{o}(V, \beta)$, und für alle $B \in \mathrm{M}_n(k)$ wirkt $\mathrm{O}(B)$ per Konjugation auf $\mathfrak{o}(B)$.

Ist V zusätzlich endlichdimensional mit Basis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$, so wird β bezüglich $\mathcal{B}$ durch eine Matrix $B \in \mathrm{M}_n(k)$ dargestellt. Durch $\mathcal{B}$ ergibt sich ein Isomorphismus $\Phi_{\mathcal{B}} \colon \mathfrak{gl}(V) \to \mathfrak{gl}_n(k)$, der jedem Endomorphismus seine darstellende Matrix bezüglich $\mathcal{B}$ zuordnet. Unter diesem Endomorphismus korrespondieren die Unteralgebren $\mathfrak{o}(V, \beta)$ und $\mathfrak{o}(B)$, und unter dem induzierten Isomorphismus $\phi_{\mathcal{B}} \colon \mathrm{GL}(V) \to \mathrm{GL}_n(k)$ korrespondiert $\mathrm{O}(V, \beta)$ zu $\mathrm{O}(B)$.

Die Konjugationswirkung von $\mathrm{O}(V, \beta)$ auf $\mathfrak{o}(V, \beta)$ und die Konjugationswirkung von $\mathrm{O}(B)$ auf $\mathfrak{o}(B)$ sind mit den obigen Isomorphismen $\Phi_{\mathcal{B}}$ und $\phi_{\mathcal{B}}$ in dem Sinne verträglich, dass

$$\phi_{\mathcal{B}}(s) \cdot \Phi_{\mathcal{B}}(f) = \phi_{\mathcal{B}}(s \cdot f) \quad \text{für alle } s \in G(V, \beta) \text{ und } f \in \mathfrak{o}(V, \beta).$$

Ist $\mathcal{C} = (w_1, \ldots, w_n)$ eine weitere Basis von V, so wird β bezüglich $\mathcal{C}$ durch eine Matrix $C \in \mathrm{M}_n(k)$ beschrieben. Der Basiswechsel von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{C}$ induziert einen Isomorphismus von Lie-Algebren

$$\Phi_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} := \Phi_{\mathcal{C}} \Phi_{\mathcal{B}}^{-1} \colon \mathfrak{o}(B) \to \mathfrak{o}(C), \quad A \mapsto \Gamma A \Gamma^{-1}$$

und einen Isomorphismus von Gruppen

$$\phi_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} := \phi_{\mathcal{C}} \phi_{\mathcal{B}}^{-1} \colon \mathrm{O}(B) \to \mathrm{O}(C), \quad S \mapsto \Gamma S \Gamma^{-1},$$

wobei $\Gamma \in \mathrm{M}_n(k)$ die Basiswechselmatrix von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{C}$ bezeichnet (d.h. die i-te Spalte von Γ sind die Koordinaten von v_i bezüglich $\mathcal{C}$). Auch $\Phi_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ und $\phi_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ sind mit der Konjugationswirkung verträglich in dem Sinne mit, dass

$$\phi_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(S) \cdot \Phi_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(A) = \Phi_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(S \cdot A) \quad \text{für alle } S \in \mathrm{O}(B) \text{ und } A \in \mathfrak{o}(B).$$

Ein Beweis der folgenden Proposition findet sich in [TY05, S. 301].

Proposition 1.4. *Es sei V ein n-dimensionaler Vektorraum und β eine nicht-entartete, symmetrische oder alternierende Bilinearform auf V. Ist $n = 2$ und β symmetrisch, so ist $\mathfrak{o}(V, \beta)$ eindimensional und damit abelsch. Ansonsten ist $\mathfrak{o}(V, \beta)$ halbeinfach.*

Korollar 1.5. *Es sei $B \in \mathrm{M}_n(k)$ invertierbar, sowie symmetrisch oder schief-symmetrisch. Ist $n = 2$ und B symmetrisch, so ist $\mathfrak{o}(B)$ eindimensional und damit abelsch. Ansonsten ist $\mathfrak{o}(B)$ halbeinfach.*

Beispiel 1.6. 1. Für die Einheitsmatrix $I \in \mathrm{M}_n(k)$ ist

$$\mathfrak{so}_n(k) \coloneqq \mathfrak{o}(I) = \{A \in \mathrm{M}_n(k) \mid A^\top = -A\}.$$

Es ist $\mathfrak{so}_1(k) = 0$, $\mathfrak{so}_2(k)$ ist eindimensional und abelsch, und für $n \geq 3$ ist $\mathfrak{so}_n(k)$ halbeinfach.

2. Für

$$\Omega = \begin{pmatrix} & I_n \\ -I_n & \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2n}(k)$$

ist

$$\mathfrak{sp}_{2n}(k) \coloneqq \mathfrak{o}(\Omega) = \{A \in \mathrm{M}_{2n}(k) \mid A^\top\Omega + \Omega A = 0\}$$

für alle $n \geq 1$ halbeinfach. Durch eine Zerlegung in $(n \times n)$-Blockmatrizen ergibt sich, dass für alle $n \geq 1$

$$\mathfrak{sp}_{2n}(k) = \left\{ \begin{pmatrix} P & Q \\ R & -P^\top \end{pmatrix} \middle| P, Q, R \in \mathrm{M}_n(k), Q^\top = Q, R^\top = R \right\}.$$

Wir führen noch die folgende Notation ein: Ist $B \in \mathrm{M}_n(k)$, so ist

$$\mathrm{SO}(B) \coloneqq \{T \in \mathrm{O}(B) \mid \det T = 1\}.$$

1.2 Jordanzerlegung

In diesem Abschnitt wiederholen wir die grundlegende Theorie der Jordanzerlegung in halbeinfachen Lie-Algebren, wobei wir zunächst an die Jordanzerlegung von Endomorphismen erinnern.

Definition 1.7. Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum. Ein Endomorphismus $X \in \mathrm{End}_k(V)$ heißt *halbeinfach*, wenn er diagonalisierbar ist.

Bemerkung 1.8. Wegen der algebraischen Abgeschlossenheit von k ist $X \in \mathrm{End}_k(V)$ ist genau dann halbeinfach, wenn jeder X-invariante Untervektorraum ein X-invariantes direktes Komplement besitzt.

Die Jordanzerlegung eines Endomorphismus $X \in \mathrm{End}_k(V)$ schreibt diesen als Summe eines halbeinfachen Endomorphismus $X_s \in \mathrm{End}_k(V)$ und eines nilpotenten Endomorphismus $X_n \in \mathrm{End}_k(V)$. Ein Beweis findet sich in [Hum72, §4.2].

Proposition 1.9 (Konkrete Jordanzerlegung)**.** *Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $X \in \mathrm{End}_k(V)$.*

1. *Es gibt eindeutige $X_s, X_n \in \mathrm{End}_k(V)$, so dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*
   a) *$X = X_s + X_n$.*
   b) *X_s ist halbeinfach und X_n nilpotent.*

c) X_s und X_n kommutieren.

2. *Es gibt Polynome $P, Q \in k[T]$ mit $P(0) = Q(0) = 0$, so dass $X_s = P(X)$ und $X_n = Q(X)$. Insbesondere kommutiert $Y \in \mathrm{End}_k(V)$ genau dann mit X, wenn Y mit X_s und X_n kommutiert.*

3. *Für Untervektorräume $U \subseteq W \subseteq V$ mit $X(W) \subseteq U$ ist auch $X_s(W) \subseteq U$ und $X_n(W) \subseteq U$.*

Definition 1.10. Ist $X \in \mathrm{End}_k(V)$, so heißt die Zerlegung $X = X_s + X_n$ aus Proposition 1.9 die *konkrete Jordanzerlegung* von X. Dabei ist X_s ist der *halbeinfache Teil* von X und X_n der *nilpotente Teil* von X. Ist $X = X_s$, also X halbeinfach, so heißt X auch *konkret halbeinfach*, und ist $X = X_n$, also X nilpotent, so heißt X auch *konkret nilpotent*.

Bemerkung 1.11. Analog zu Definition 1.7 sind halbeinfache Elemente in $\mathrm{M}_n(k)$ definiert, und Proposition 1.9, sowie die daraus resultierende konkrete Jordanzerlegung aus Definition 1.10, verallgemeinern sich ebenso auf $\mathrm{M}_n(k)$.

Wir wollen das Konzept eines halbeinfachen, bzw. nilpotenten Elementes auf Lie-Algebren verallgemeinern, wobei wir uns zunächst auf halbeinfache Lie-Algebren beschränken. Entscheidend hierfür ist der Begriff eines ad-halbeinfachen, bzw. ad-nilpotenten Elementes.

Definition 1.12. Ein Element X einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ heißt ad-*halbeinfach*, bzw. ad-*nilpotent*, falls $\operatorname{ad} X$ halbeinfach, bzw. nilpotent ist.

Beispiel 1.13. Es sei $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ eine lineare Lie-Algebra.

Ist $X \in \mathfrak{g}$ halbeinfach, so ist X auch ad-halbeinfach. Um dies zu sehen sei $(v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V aus Eigenvektoren von X, wobei v_i ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_i ist. Dann ist $(E_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ mit

$$E_{ij}(v_k) = \delta_{jk} v_i \quad \text{für alle } k = 1, \dots, n$$

eine Basis von $\mathfrak{gl}(V)$. Für alle $i, j, k = 1, \dots, n$ ist

$$\begin{aligned}
[X, E_{ij}](v_k) &= X E_{ij}(v_k) - E_{ij} X(v_k) = \delta_{jk} X(v_i) - \lambda_k E_{ij}(v_k) \\
&= \lambda_i \delta_{jk} v_i - \lambda_k \delta_{jk} v_i = (\lambda_i - \lambda_k)\delta_{jk} v_i \\
&= (\lambda_i - \lambda_j)\delta_{jk} v_i = (\lambda_i - \lambda_j) E_{ij}(v_k),
\end{aligned}$$

und somit

$$[X, E_{ij}] = (\lambda_i - \lambda_j) E_{ij} \quad \text{für alle } i, j = 1, \dots, n.$$

Also ist $\operatorname{ad}_{\mathfrak{gl}(V)} X \in \mathrm{End}_k(\mathfrak{gl}(V))$ halbeinfach, und somit auch $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} X = (\operatorname{ad}_{\mathfrak{gl}(V)} X)|_{\mathfrak{g}}$.

Ist $X \in \mathfrak{g}$ nilpotent, so ist X auch ad-nilpotent. Es ist nämlich $\operatorname{ad}_{\mathfrak{gl}(V)} X = \lambda_X - \rho_{-X}$, wobei λ_X die Linksmultiplikation mit X bezeichnet und ρ_{-X} die Rechtsmultiplikation mit $-X$. Da X nilpotent ist, sind es auch λ_X und ρ_{-X}. Da λ_X und ρ_{-X} kommutieren ist damit auch $\operatorname{ad}_{\mathfrak{gl}(V)} X$ nilpotent. Also ist $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} X = (\operatorname{ad}_{\mathfrak{gl}(V)} X)|_{\mathfrak{g}}$ nilpotent.

Analog ergibt sich für eine Unteralgebra $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}_n(k)$, dass halbeinfache $X \in \mathfrak{g}$ ebenfalls ad-halbeinfach sind, und nilpotente X ebenfalls ad-nilpotent.

Das nächste Lemma erlaubt es uns, die konkrete Jordanzerlegung auf Unteralgebren einzuschränken, sofern diese halbeinfach sind. Ein Beweis findet sich in [Hum72, §6.4].

Lemma 1.14. *Ist V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ eine halbeinfache Unteralgebra, so enthält $\mathfrak{g}$ die halbeinfachen und nilpotenten Teile aller ihrer Elemente.*

Ist $\mathfrak{g}$ eine beliebige halbeinfache Lie-Algebra, so ist $\ker \operatorname{ad} = Z(\mathfrak{g}) = 0$ und deshalb $\operatorname{ad}\colon \mathfrak{g} \to \operatorname{ad}\mathfrak{g}$ ein Isomorphismus von Lie-Algebren. Dies erlaubt zusammen mit dem vorherigen Lemma die Verallgemeinerung der Jordanzerlegung auf beliebige halbeinfache Lie-Algebren.

Proposition 1.15 (Abstrakte Jordanzerlegung)**.** *Ist $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Lie-Algebra, so gibt es für jedes Element $X \in \mathfrak{g}$ eindeutige $X_s, X_n \in \mathfrak{g}$, so dass*

1. $X = X_s + X_n$,
2. *X_s ist* ad*-halbeinfach und X_n ist* ad*-nilpotent,*
3. *X_s und X_n kommutieren.*

X_s und X_n sind eindeutig dadurch bestimmt, dass

$$\operatorname{ad}(X_s) = (\operatorname{ad} X)_s \quad \textit{und} \quad \operatorname{ad}(X_n) = (\operatorname{ad} X)_n.$$

Ein Element $Y \in \mathfrak{g}$ kommutiert genau dann mit X, wenn Y mit X_s und X_n kommutiert.

Definition 1.16. Ist $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Lie-Algebra und $X \in \mathfrak{g}$, so heißt die Zerlegung $X = X_s + X_n$ aus Proposition 1.15 die *(abstrakte) Jordanzerlegung* von X. Dabei ist X_s ist der *halbeinfache Teil* von X und X_n der *nilpotente Teil* von X. Ferner heißt X *halbeinfach*, falls $X = X_s$, und *nilpotent* falls $X = X_n$.

Bemerkung 1.17. Es sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Lie-Algebra.

1. $X \in \mathfrak{g}$ ist genau dann halbeinfach, bzw. nilpotent, wenn X ad-halbeinfach, bzw. ad-nilpotent ist.
2. Ist $\mathfrak{g}$ linear, so folgt aus der Eindeutigkeit der abstrakten Jordanzerlegung, dass die abstrakte und die konkrete Jordanzerlegung auf $\mathfrak{g}$ übereinstimmen. Dementsprechend werden wir in diesem Fall nicht zwischen konkreter und abstrakter Jordanzerlegung unterscheiden.

Da für eine halbeinfache Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ der Isomorphismus $\operatorname{ad}\colon \mathfrak{g} \to \operatorname{ad}\mathfrak{g}$ mit der abstrakten und konkreten Jordan verträglich ist, ergibt sich zusammen mit [Hum72, Korollar 6.4] die Funktorialität der Jordanzerlegung.

Lemma 1.18 (Funktorialität der Jordanzerlegung)**.** *Es seien $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$ zwei halbeinfache Lie-Algebren und $X \in \mathfrak{g}_1$ mit Jordanzerlegung $X = X_s + X_n$. Ist $\phi\colon \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ ein Homomorphismus, so ist $\phi(X_s) = \phi(X)_s$ und $\phi(X_n) = \phi(X)_n$.*

Wir halten schließlich noch das folgende nützliches Ergebnis fest.

Lemma 1.19. *Es sei* $\mathfrak{g}$ *eine Lie-Algebra,* $X \in \mathfrak{g}$ ad*-halbeinfach und* $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\lambda \in k} \mathfrak{g}_\lambda$ *die Eigenraumzerlegung von* $\operatorname{ad} X$*. Dann ist* $[\mathfrak{g}_\lambda, \mathfrak{g}_\mu] \subseteq \mathfrak{g}_{\lambda+\mu}$ *für alle* $\lambda, \mu \in k$*.*

Beweis. Für $Y_1 \in \mathfrak{g}_\lambda$ und $Y_2 \in \mathfrak{g}_\mu$ ist nach der Jacobi-Identität

$$[X, [Y_1, Y_2]] = [[X, Y_1], Y_2] + [Y_1, [X, Y_2]] = \lambda[Y_1, Y_2] + \mu[Y_1, Y_2] = (\lambda + \mu)[Y_1, Y_2],$$

also $[Y_1, Y_2] \in \mathfrak{g}_{\lambda+\mu}$. □

1.3 $\mathfrak{sl}_2$-Theorie

Die Lie-Algebra $\mathfrak{sl}_2(k)$ ist die kleinste nicht-triviale halbeinfache Lie-Algebra, und die Klassifikation der endlichdimensionalen Darstellungen von $\mathfrak{sl}_2(k)$ ist ein klassisches und mächtiges Hilfsmittel zur Untersuchung halbeinfacher Lie-Algebren. Beweise der folgenden Aussagen finden sich in [Hum72, §7].

Definition 1.20. Die *Standardbasis* (e, h, f) *von* $\mathfrak{sl}_2(k)$ ist gegeben durch

$$e := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für die Standardbasis von $\mathfrak{sl}_2(k)$ gilt

$$[h, e] = 2e, \quad [h, f] = -2f \quad \text{und} \quad [e, f] = h.$$

Ist V eine Darstellung von $\mathfrak{sl}_2(k)$, so schreiben wir

$$V_\lambda := \{v \in V \mid h \cdot v = \lambda v\} \quad \text{für alle } \lambda \in k.$$

Eine der fundamentalen Erkenntnisse über $\mathfrak{sl}_2(k)$ ist die Klassifikation der endlichdimensionalen, irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{sl}_2(k)$.

Proposition 1.21. *Für jedes* $n \geq 1$ *gibt es bis auf Isomorphie genau eine* n*-dimensionale irreduzible Darstellung* V^n *von* $\mathfrak{sl}_2(k)$*. Dabei ist*

$$V^n = V^n_{-n+1} \oplus V^n_{-n+3} \oplus \cdots \oplus V^n_{n-3} \oplus V^n_{n-1}$$

mit $\dim V^n_i = 1$ *für alle* $i = -n+1, -n+3, \ldots, n-1$*. Die Basiselemente* e *und* f *von* $\mathfrak{sl}_2(k)$ *wirken auf* V^n *durch*

$$e \cdot V^n_\lambda = \begin{cases} V^n_{\lambda+2} & \textit{falls } \lambda \neq -d-1, \\ 0 & \textit{falls } \lambda = -d-1, \end{cases} \quad \textit{und} \quad f \cdot V^n_\lambda = \begin{cases} V^n_{\lambda-2} & \textit{falls } \lambda \neq d+1, \\ 0 & \textit{falls } \lambda = d+1. \end{cases}$$

Insbesondere gibt es eine Basis $b_{-n+1}, b_{-n+3} \ldots, b_{n-1} \in V^n$ *mit* $b_i \in V_i$ *für alle* $i = -n+1, \ldots, n-1$*, so dass*

$$e \cdot b_i = \begin{cases} b_{i+2} & \textit{für } i = -n+1, \ldots, n-3, \\ 0 & \textit{für } i = n-1. \end{cases}$$

Da nach dem Satz von Weyl jede endlichdimensionale Darstellung von $\mathfrak{sl}_2(k)$ halbeinfach ist, lassen sich damit alle endlichdimensionalen Darstellungen von $\mathfrak{sl}_2(k)$ verstehen.

Korollar 1.22. *Es sei eine V eine endlichdimensionale Darstellung von $\mathfrak{sl}_2(k)$. Dann gibt es eine Zerlegung $V = \bigoplus_{d \geq 1} \bigoplus_{i=1}^{\nu_d} W^{d,i}$ in irreduzible Unterdarstellungen $W^{d,i}$ mit $\dim W^{d,i} = d$. Für alle $d \geq 1$ und $i = 1, \dots, \nu_d$ ist dann*

$$W^{d,i} = W^{d,i}_{-d+1} \oplus W^{d,i}_{-d+3} \oplus \cdots \oplus W^{d,i}_{d-3} \oplus W^{d,i}_{d-1},$$

wobei alle Summanden eindimensional sind, und somit auch $V = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V_n$ mit

$$V_n = \bigoplus_{d \geq 1} \bigoplus_{i=1}^{\nu_d} W_n^{d,i} = \bigoplus_{\substack{p \geq 0 \\ d=|n|+1+2p}} \bigoplus_{i=1}^{\nu_d} \underbrace{W_n^{d,i}}_{1\text{-}dim.}$$

Insbesondere ist $\dim V_n = \bigoplus_{p \geq 0, d=|n|+1+2p} \nu_d$ und $\dim V_n = \dim V_{-n}$ für alle $n \geq 0$, sowie $\dim V = \dim V_0 + \dim V_1$. Zudem ist $\nu_d = \dim V_{d-1} - \dim V_{d+1}$ für alle $d \geq 1$. Insbesondere sind die Zahlen ν_d für alle $d \geq 1$ eindeutig.

Ist U eine weitere endlichdimensionale Darstellung von $\mathfrak{sl}_2(k)$ mit einer Zerlegung $U = \bigoplus_{d \geq 1} \bigoplus_{i=1}^{\mu_d} \overline{W}^{d,i}$ in irreduzible Unterdarstellungen, so sind V und U genau dann isomorph, wenn $\nu_d = \mu_d$ für alle $d \geq 0$.

Proposition 1.21 lässt sich auch nutzen, um einen endlichdimensionalen Vektorraum die zusätzliche Struktur einer irreduziblen Darstellung von $\mathfrak{sl}_2(k)$ zu geben.

Lemma 1.23. *Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum mit $d \coloneqq \dim V \geq 1$. Es sei $(b_{-d+1}, b_{-d+3}, \dots, b_{d-3}, b_{d-1})$ eine Basis von V. Dann lässt sich V die Struktur einer irreduziblen Darstellung von $\mathfrak{sl}_2(k)$ geben, so dass*

$$h \cdot b_i = i b_i \quad \textit{für alle } i = -d+1, -d+3, \dots, d-3, d-1, \quad \textit{und}$$

$$e \cdot b_i = \begin{cases} b_{i+2} & \textit{für } i = -d+1, -d+3, \dots, d-3, \\ 0 & \textit{für } i = d-1. \end{cases}$$

1.4 Cartan-Unteralgebren und Wurzelraumzerlegung

In diesem Abschnitt erinnern wir an das grundlegende Konzept einer Cartan-Unteralgebra einer halbeinfachen Lie-Algebra. Wir erläutern das Zustandekommen der resultierenden Wurzelraumzerlegung und halten einige ihrer elementaren Eigenschaften fest.

Definition 1.24. Eine Unteralgebra $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ heißt *toral* falls $\mathfrak{h}$ aus ad-halbeinfachen Elementen besteht.

Beispiel 1.25. 1. Die Unteralgebra der Diagonalmatrizen $\mathfrak{d}_n(k) \subseteq \mathfrak{gl}_n(k)$ besteht aus halbeinfachen Elementen (in der Sinne der konkreten Jordanzerlegung) und damit aus ad-halbeinfachen Elementen.

2. Nach gleicher Argumentation ist $\mathfrak{h} := \mathfrak{d}_n(k) \cap \mathfrak{sl}_n(k)$ eine torale Unteralgebra von $\mathfrak{sl}_n(k)$ und $\mathfrak{d}_n(k)$ eine torale Unteralgebra von $\mathfrak{t}_n(k)$.
3. Ist allgemeiner $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine torale Unteralgebra und $\mathfrak{g}' \subseteq \mathfrak{g}$ eine Unteralgebra, so ist $\mathfrak{h}' := \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}'$ eine torale Unteralgebra von $\mathfrak{g}'$: Für jedes $X \in \mathfrak{h}'$ ist $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} X$ halbeinfach, und somit auch $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}'} X = (\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} X)|_{\mathfrak{g}'}$.

In jedem der obigen Beispiele ist die torale Unteralgebra abelsch. Wie in [Hum72, §8.1] gezeigt wird, ist dies kein Zufall.

Lemma 1.26. *Torale Unteralgebren sind abelsch.*

Diese Kommutativität hat entscheidende Konsequenzen für die adjungierte Darstellung einer toralen Unteralgebra: Ist $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine torale Unteralgebra, so besteht $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{h} \subseteq \operatorname{End}_k(\mathfrak{g})$ aus halbeinfachen, paarweise kommutierenden Endomorphismen. Diese sind simultan diagonalisierbar, weshalb $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{h}^*} \mathfrak{g}_\alpha$ gilt, wobei

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} \mid [H, X] = \alpha(H)X \text{ für alle } H \in \mathfrak{h}\}.$$

Die Elemente $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ mit $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$ spielen eine bedeutende Rolle bei der Untersuchung von $\mathfrak{g}$ durch $\mathfrak{h}$.

Definition 1.27. Für eine torale Unteralgebra $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ sei

$$\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) := \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \setminus \{0\} \mid \mathfrak{g}_\alpha \neq 0\}.$$

In halbeinfachen Lie-Algebren, in denen (ad)-halbeinfache Elemente mithilfe der Jordanzerlegung verstanden werden können, spielen maximale torale Unteralgebren eine besondere Rolle.

Definition 1.28. Eine *Cartan-Unteralgebra* (CSA) einer halbeinfachen Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ist eine maximale torale Unteralgebra $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$. Die Elemente von $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ heißen *Wurzeln* von $\mathfrak{g}$ bezüglich $\mathfrak{h}$.

Bemerkung 1.29. Ist $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Lie-Algebra, so ist jedes halbeinfache Element von $\mathfrak{g}$ in einer CSA enthalten. Mit dem halbeinfachen Element $0 \in \mathfrak{g}$ ergibt sich damit, dass $\mathfrak{g}$ eine CSA enthält.

Ist $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Lie-Algebra mit CSA $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$, so ist $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}_0$, da $\mathfrak{h}$ abelsch ist. Wie in [Hum72, §8.2] ergibt sich auch die Umkehrung.

Lemma 1.30. *Ist $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine CSA einer halbeinfachen Lie-Algebra $\mathfrak{g}$, so ist $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$, d.h. $\mathfrak{h}$ ist selbstzentralisierend.*

Für eine halbeinfache Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ und CSA $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ ergibt sich mit den Wurzeln $\Phi := \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ damit eine Zerlegung

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{h}^*} \mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha,$$

da $\mathfrak{g}_\alpha = 0$ für $\alpha \notin \Phi \cup \{0\}$ und $\mathfrak{g}_0 = Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$.

Definition 1.31. Es sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Lie-Algebra und $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine CSA. Die Zerlegung

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha$$

mit $\Phi := \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ ist die *Wurzelraumzerlegung* von $\mathfrak{g}$ bezüglich $\mathfrak{h}$. Die Räume $\mathfrak{g}_\alpha$, $\alpha \in \Phi$ sind die entsprechenden *Wurzelräume*.

Beispiel 1.32. Es sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(k)$ und $\mathfrak{h} := \mathfrak{d}_n(k) \cap \mathfrak{sl}_n(k)$ die Unteralgebra der spurlosen Diagonalmatrizen. Aus Beispiel 1.25 ist $\mathfrak{h}$ eine torale Unteralgebra von $\mathfrak{g}$, und es handelt sich bereits um eine CSA.

Um dies zu sehen sei $\mathfrak{h}' \subseteq \mathfrak{g}$ eine CSA. $\mathfrak{h}'$ besteht aufgrund der Übereinstimmung der konkreten und abstrakten Jordanzerlegung aus halbeinfachen Elementen. Da $\mathfrak{h}'$ abelsch ist, sind die Elemente aus $\mathfrak{h}'$ simultan diagonalisierbar. Es gibt also $S \in \mathrm{GL}_n(k)$ mit $S\mathfrak{h}'S^{-1} \subseteq \mathfrak{d}_n(k)$. Die Konjugation mit S ist ein Lie-Algebra-Automorphismus von $\mathfrak{gl}_n(k)$, unter dem $\mathfrak{g}$ invariant ist, der sich also zu einem Automorphismus von $\mathfrak{g}$ einschränken lässt. Daher ist $S\mathfrak{h}'S^{-1}$ eine CSA von $\mathfrak{g}$ mit $S\mathfrak{h}'S^{-1} \subseteq \mathfrak{h}$, woraus wegen der Maximalität von $S\mathfrak{h}'S^{-1}$ folgt, dass $\mathfrak{h} = S\mathfrak{h}'S^{-1}$. Da es eine CSA in $\mathfrak{sl}_n(k)$ gibt, ist damit auch $\mathfrak{h}$ eine CSA von $\mathfrak{sl}_n(k)$

Für $X = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathfrak{h}$ ist

$$[X, E_{ij}] = (\lambda_i - \lambda_j)E_{ij} \quad \text{für alle } i, j = 1, \dots, n,$$

wobei $(E_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ die Standardbasis von $\mathfrak{gl}_n(k)$ bezeichnet. Für $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \mathfrak{h}^*$ mit

$$\varepsilon_i(\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = \lambda_i \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n$$

ist daher

$$\mathfrak{g}_{\varepsilon_i - \varepsilon_j} = kE_{ij} \quad \text{für alle } 1 \leq i \neq j \leq n.$$

Damit ergeben sich für $\mathfrak{g}$ bezüglich $\mathfrak{h}$ die Wurzeln

$$\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid 1 \leq i \neq j \leq n\}$$

und die Wurzelraumzerlegung

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{i \neq j} kE_{ij}.$$

In diesem Beispiel zeigen sich bereits einige elementare Eigenschaften der Wurzelraumzerlegung, die wir hier noch festhalten wollen. Beweise finden sich in [Hum72, §8.3 – §8.5].

Proposition 1.33 (Eigenschaften der Wurzelraumzerlegung)**.** *Es seien $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Lie-Algebra, $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine CSA und $\Phi := \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ die entsprechenden Wurzeln.*

1. *Φ erzeugt $\mathfrak{h}^*$ als k-Vektorraum.*

2. *Ist $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \Phi$ eine k-Basis von $\mathfrak{h}^*$, so ist $\Phi \subseteq \mathrm{span}_{\mathbb{Q}}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.*

3. *Für alle* $\alpha \in \Phi$ *ist* $k\alpha \cap \Phi = \{-\alpha, \alpha\}$.
4. *Die Wurzelräume* $\mathfrak{g}_\alpha$, $\alpha \in \Phi$ *sind eindimensional und* $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$.
5. *Für alle* $\alpha, \beta \in \Phi$ *ist*

$$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \begin{cases} 0 & \text{falls } \alpha + \beta \notin \Phi, \\ \mathfrak{g}_{\alpha+\beta} & \text{falls } \alpha + \beta \in \Phi, \end{cases} \quad \text{und} \quad [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subseteq \mathfrak{h}.$$

6. *Ist* $\alpha \in \Phi$, *so ist* $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subseteq \mathfrak{h}$ *eindimensional und* $\alpha([\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]) \neq 0$.
   Insbesondere gibt es ein eindeutiges Element $H_\alpha \in [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$ *mit* $\alpha(H_\alpha) = 2$ *und* $kH_\alpha = [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$, *und*

$$S_\alpha := \mathfrak{g}_\alpha \oplus kH_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha} \subseteq \mathfrak{h}$$

   ist eine Unteralgebra mit $S_\alpha \cong \mathfrak{sl}_2(k)$.

1.5 Reduktive Lie-Algebren

Reduktive Lie-Algebren entstehen durch das Hinzufügen eines Zentrums zu einer halbeinfachen Lie-Algebra, und sind eine Verallgemeinerung der solchen. Die Lie-Algebra-Struktur einer reduktiven Lie-Algebra ist durch die zugrundeliegende halbeinfache Lie-Algebra bereits eindeutig bestimmt. Dies führt dazu, dass sich viele Konzepte und Aussagen aus der Theorie halbeinfacher Lie-Algebren direkt auf reduktive verallgemeinern lassen.

1.5.1 Definition

Lemma 1.34. *Für eine Lie-Algebra* $\mathfrak{g}$ *sind äquivalent:*

1. $\mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g}) \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ *und* $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ *ist halbeinfach.*
2. $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{s}$ *für ein abelsches Ideal* $\mathfrak{a}$ *und ein halbeinfaches Ideal* $\mathfrak{s}$.
3. *Die adjungierte Darstellung von* $\mathfrak{g}$ *ist halbeinfach.*
4. $\operatorname{rad} \mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g})$.

Ferner gilt in 2 bereits $\mathfrak{a} = Z(\mathfrak{g})$ *und* $\mathfrak{s} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

Beweis. ($4 \Rightarrow 3$) $\operatorname{ad} \mathfrak{g}$ ist halbeinfach als Lie-Algebra, da

$$\operatorname{ad} \mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}/\operatorname{rad} \mathfrak{g}.$$

Nach dem Satz von Weyl ist deshalb $\mathfrak{g}$ halbeinfach als $(\operatorname{ad} \mathfrak{g})$-Modul.
($3 \Rightarrow 2$) Es existiert eine Zerlegung

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_n \oplus \mathfrak{s}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{s}_m$$

in irreduzible Ideale, wobei $\dim \mathfrak{a}_i = 1$ und $\dim \mathfrak{s}_j \geq 2$. Als Lie-Algebren sind die $\mathfrak{a}_i$ damit abelsch und die $\mathfrak{s}_j$ einfach. Also ist $\mathfrak{a} := \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_n$ abelsch und $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{s}_m$ halbeinfach mit $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{s}$.
(2 $\Rightarrow$ 1) Es ist $Z(\mathfrak{g}) = Z(\mathfrak{a}) \oplus Z(\mathfrak{s}) = \mathfrak{a}$ und $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] = \mathfrak{s}$.
(1 $\Rightarrow$ 4) Es ist $\operatorname{rad} \mathfrak{g} = \operatorname{rad}(Z(\mathfrak{g})) \oplus \operatorname{rad}([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = Z(\mathfrak{g})$. □

Definition 1.35. Eine Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ heißt *reduktiv* falls sie eine (und damit alle) der Bedingungen in Lemma 1.34 erfüllt.

Bemerkung 1.36. Nach Lemma 1.34 ist die Zerlegung einer reduktiven Lie-Algebra in eine abelsches und halbeinfaches Ideal eindeutig.

Beispiel 1.37. 1. Abelsche und halbeinfache Lie-Algebren sind reduktiv. Endliche Produkte von reduktiven Lie-Algebren sind ebenfalls reduktiv.

2. $\mathfrak{gl}_n(k)$ ist reduktiv, denn es gilt $Z(\mathfrak{gl}_n(k)) = kI$ und $[\mathfrak{gl}_n(k), \mathfrak{gl}_n(k)] = \mathfrak{sl}_n(k)$ mit Zerlegung $\mathfrak{gl}_n(k) = kI \oplus \mathfrak{sl}_n(k)$.

3. Die oberen Dreiecksmatrizen $\mathfrak{t}_n(k)$ sind für $n \geq 2$ nicht reduktiv. Zum einen ist $Z(\mathfrak{t}_n(k)) = kI$ und $[\mathfrak{t}_n(k), \mathfrak{t}_n(k)] = \mathfrak{n}_n(k)$, aber $\mathfrak{t}_n(k) \neq kI \oplus \mathfrak{n}_n(k)$. Zum anderen ist auch $\operatorname{rad} \mathfrak{t}_n(k) = \mathfrak{t}_n(k) \neq kI = Z(\mathfrak{t}_n(k))$.

4. Das Beispiel $\mathfrak{t}_n(k) \subseteq \mathfrak{gl}_n(k)$ zeigt auch, dass Unteralgebren reduktiver Lie-Algebren nicht notwendigerweise selber reduktiv sind.

5. Quotienten reduktiver Lie-Algebren sind ebenfalls reduktiv: Es sei $\mathfrak{g}$ eine reduktive Lie-Algebra und $I \subseteq \mathfrak{g}$ ein Ideal. Es gilt zu zeigen, dass die adjungierte Darstellung von $\mathfrak{g}/I$ halbeinfach ist. Die adjungierte Darstellung von $\mathfrak{g}$ induziert eine $\mathfrak{g}$-Modulstrukter auf $\mathfrak{g}/I$. Es ist dann $\mathfrak{g}/I$ der Quotientenmodul von $\mathfrak{g}$ an I, und die adjungierte Darstellung von $\mathfrak{g}/I$ ist genau dann halbeinfach, wenn $\mathfrak{g}/I$ ein halbeinfacher $\mathfrak{g}$-Modul ist. Da aber $\mathfrak{g}$ selbst ein halbeinfacher $\mathfrak{g}$-Modul ist, folgt, dass auch der Quotient $\mathfrak{g}/I$ ein halbeinfacher $\mathfrak{g}$-Modul ist.

Die Zerlegung einer reduktiven Lie-Algebra in ihr Zentrum und ihren halbeinfachen Teil ist in gewissem Rahmen mit Homomorphismen verträglich.

Lemma 1.38. *Es seien $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$ zwei reduktive Lie-Algebren mit $\mathfrak{s}_1 := [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1]$ und $\mathfrak{s}_2 := [\mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_2]$. Ist $\phi \colon \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ ein Homomorphismus, so ist $\phi(\mathfrak{s}_1) \subseteq \mathfrak{s}_2$.*

Beweis. Es ist $\mathfrak{s}_1 = [\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_1]$, da $\mathfrak{s}_1$ halbeinfach ist. Also ist

$$\phi(\mathfrak{s}_1) = \phi([\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_1]) = [\phi(\mathfrak{s}_1), \phi(\mathfrak{s}_1)] \subseteq [\mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_2] = \mathfrak{s}_2.$$ □

Bemerkung 1.39. Die analoge Aussage für die Zentren von $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$ gilt im Allgemeinen nicht. So ist etwa die Inklusion $\mathfrak{d}_2(k) \hookrightarrow \mathfrak{gl}_2(k)$ ein Homomorphismus, aber $Z(\mathfrak{d}_2(k)) = \mathfrak{d}_2(k) \subsetneq kI = Z(\mathfrak{gl}_2(k))$.

1.5.2 Halbeinfache und Nilpotente Elemente

Wir wollen auch das Konzept halbeinfacher und nilpotenter Elemente auf reduktive Lie-Algebren verallgemeinern.

In $\mathrm{M}_n(k)$, sowie $\mathrm{End}_k(V)$ für einen endlichdimensionalen Vektorraum V, sind die halbeinfachen und nilpotenten Elemente über die konkrete Jordanzerlegung charakterisiert. In einer halbeinfachen Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ sind halbeinfache und nilpotente Elemente durch die adjungierte Darstellung charakterisiert, über die sich aus der konkreten Jordanzerlegung in $\operatorname{ad}\mathfrak{g}$ die abstrakte Jordanzerlegung in $\mathfrak{g}$ ergibt.

Die verschiedenen Konzepte von Halbeinfachheit und Nilpotenz in $\mathfrak{g}$ sind miteinander verträglich: $X \in \mathfrak{g}$ genau dann halbeinfach, bzw. nilpotent, wenn X ad-halbeinfach, bzw. ad-nilpotent ist. Ist $\mathfrak{g}$ zusätzlich linear, so stimmen diese Begriffe außerdem mit denen der konkreten Jordanzerlegung überein.

Für eine reduktive Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ entsteht das Problem, dass $Z(\mathfrak{g})$ nicht notwendigerweise trivial ist. Insbesondere sind die Element in $Z(\mathfrak{g})$ sowohl ad-halbeinfach als auch ad-nilpotent. Ist $\mathfrak{g}$ zusätzlich linear, so können wir halbeinfache und nilpotente Element in $\mathfrak{g}$ deshalb nicht notwendigerweise über die adjungierte Darstellung beschreiben.

Beispiel 1.40. Die Lie-Algebra

$$\mathfrak{g} := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in k \right\}$$

ist abelsch, da sich eine Basis aus zwei kommutierendenden Elementen hat, und ist damit reduktiv. Da die adjungierte Darstellung trivial ist können wir über sie keine Rückschlüsse auf einzelne Elemente in $\mathfrak{g}$ ziehen. Insbesondere liefert die adjungierte Darstellung *keine* Aussagen über Halbeinfachheit und Nilpotenz eines Elementes in $\mathfrak{g}$.

Im Allgemeinen dürfen wir also nicht darauf hoffen, die halbeinfachen und nilpotenten Elemente einer linearen reduktiven Lie-Algebra über die adjungierte Darstellung charakterisieren zu können.

Um ein Konzept von halbeinfachen und nilpotenten Elementen in einer reduktiven Lie-Algebra zu entwickeln, charakterisieren wir zunächst ad-halbeinfache und ad-nilpotente Elemente über die zugrundeliegende halbeinfache Lie-Algebra.

Lemma 1.41. *Es sei $\mathfrak{g}$ eine reduktive Lie-Algebra mit $\mathfrak{s} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Es sei $X \in \mathfrak{g}$ mit Zerlegung $X = X_1 + X_2$ bezüglich $\mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{s}$. Dann gilt:*

1. *X genau dann* ad*-halbeinfach, bzw.* ad*-nilpotent, wenn $X_2 \in \mathfrak{s}$ halbeinfach, bzw. nilpotent ist (im Sinne der abstrakten Jordanzerlegung in $\mathfrak{s}$).*
2. *Ist $\mathfrak{g}$ zusätzlich linear, so ist dies außerdem äquivalent dazu, dass X_2 konkret halbeinfach, bzw. konkret nilpotent ist.*

Beweis. Bezüglich $\mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{s}$ ist

$$\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} X = 0 \oplus \operatorname{ad}_{\mathfrak{s}} X_2 \quad \text{und} \quad \operatorname{ad}_{\mathfrak{s}} X_2 = (\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} X)|_{\mathfrak{s}}.$$

Deshalb ist X genau dann $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$-halbeinfach, bzw. $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$-nilpotent, wenn X_2 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{s}}$-halbeinfach, bzw. $\mathrm{ad}_{\mathfrak{s}}$-nilpotent ist. Der zweite Teil der Aussage folgt aus der Übereinstimmung der abstrakten und konkreten Jordanzerlegung in halbeinfachen Lie-Algebren. □

Ist also $\mathfrak{g}$ eine lineare reduktive Lie-Algebra, so deren Zentrum sich gut genug verhält, so können wir deshalb die halbeinfachen und nilpotenten Elemente über die adjungierte Darstellung charakterisieren.

Lemma 1.42. *Es sei $\mathfrak{g}$ eine lineare reduktive Lie-Algebra, so dass $Z(\mathfrak{g})$ aus halbeinfachen Elementen besteht. Dann gilt für alle $X \in \mathfrak{g}$:*

1. *X ist genau dann halbeinfach, wenn X ad-halbeinfach ist.*
2. *X ist genau dann nilpotent, wenn X ad-nilpotent ist und $X \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{s} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

1. Ist X halbeinfach, so ist X nach Beispiel 1.13 auch ad-halbeinfach. Andererseits sei $X \in \mathfrak{g}$ ad-halbeinfach mit Zerlegung $X = X_1 + X_2$ bezüglich $\mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{s}$. Nach Lemma 1.41 ist X_2 halbeinfach. Da $X_1 \in Z(\mathfrak{g})$ kommutieren X_1 und X_2 auch miteinander. Somit ist X als Summe zweier kommutierender, halbeinfacher Elemente selbst halbeinfach.

2. Ist X $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$-nilpotent mit $X \in \mathfrak{s}$, so ist X nach Lemma 1.41 nilpotent.

   Es sei andererseits X nilpotent. Dann ist X nach Beispiel 1.13 insbesondere ad-nilpotent und es gilt zu zeigen, dass $X \in \mathfrak{s}$. Es sei $X = X_1 + X_2$ bezüglich $\mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{s}$. Nach Annahme ist X_1 halbeinfach. Nach Lemma 1.41 folgt aus der ad-Nilpotenz von X, dass X_2 nilpotent ist. Da $X_1 \in Z(\mathfrak{g})$ kommutieren X_1 und X_2 miteinander. Damit erfüllen X_1 und X_2 alle Eigenschaften der konkreten Jordanzerlegung von X, wobei X_1 der halbeinfach Teil von X und X_2 der nilpotente Teil von X ist. Da X nilpotent ist gilt bereits $X = X_2 \in \mathfrak{s}$. □

Dies motiviert die Definition halbeinfacher und nilpotenter Elemente in einer beliebigen reduktiven Lie-Algebra.

Definition 1.43. Es sei $\mathfrak{g}$ eine reduktive Lie-Algebra. Ein Element $X \in \mathfrak{g}$ heißt *halbeinfach*, wenn es ad-halbeinfach ist. X heißt *nilpotent*, wenn $X \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ und X ad-nilpotent ist. Gegebenenfalls wird X auch *abstrakt halbeinfach*, bzw. *abstrakt nilpotent* genannt.

Ist $\mathfrak{g}$ eine lineare reduktive Lie-Algebra, so haben wir bereits in Beispiel 1.40 gesehen, dass die abstrakt halbeinfachen, bzw. abstrakt nilpotenten Elemente nicht notwendigerweise mit den konkret halbeinfachen, bzw. konkret nilpotenten Elementen übereinstimmen. Ob sie übereinstimmen, hängt nach Lemma 1.42 allein von $Z(\mathfrak{g})$ ab.

Korollar 1.44. *Ist $\mathfrak{g}$ eine lineare reduktive Lie-Algebra, so stimmen die abstrakt halbeinfachen, bzw. abstrakt nilpotenten Elemente genau dann mit den konkret halbeinfach, bzw. konkret nilpotenten überein, wenn $Z(\mathfrak{g})$ aus konkret halbeinfachen Elementen besteht.*

Beweis. Besteht $Z(\mathfrak{g})$ aus konkret halbeinfachen Elementen, so sind die abstrakt halbeinfachen, bzw. abstrakt nilpotenten Elemente nach Lemma 1.42 bereits konkret halbeinfach, bzw. konkret nilpotent.

Andererseits besteht $Z(\mathfrak{g})$ aus abstrakt halbeinfachen Elementen, und sofern diese mit den konkret halbeinfachen übereinstimmen, somit auch aus konkret halbeinfachen. □

So wie wir für lineare halbeinfache Lie-Algebren nicht zwischen der abstrakten und konkreten Jordanzerlegung unterscheiden, werden wir für lineare reduktive Lie-Algebren wie in Lemma 1.42 auch nicht zwischen abstrakt halbeinfachen, bzw. abstrakt nilpotenten Elementen und konkret halbeinfachen, bzw. konkret nilpotenten unterscheiden.

Bemerkung 1.45. Ist $\mathfrak{g}$ eine lineare reduktive Lie-Algebra, so geht aus dem Beweis von Lemma 1.42 hervor, dass alle abstrakt nilpotenten Elemente von $\mathfrak{g}$ bereits konkret nilpotent sind, und alle konkret halbeinfachen Elemente auch abstrakt halbeinfach.

Beispiel 1.46. 1. Ist $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Lie-Algebra, so stimmen die abstrakt halbeinfachen, bzw. abstrakt nilpotenten Elemente in $\mathfrak{g}$ in Sinne von Definition 1.43 mit den halbeinfachen, bzw. nilpotenten Elementen in Sinne von Definition 1.16, d.h. im Sinne der abstakten Jordanzerlegung, überein.

2. Ist $\mathfrak{g}$ eine lineare halbeinfache Lie-Algebra, so ist stimmen die abstrakt halbeinfachen, bzw. abstrakt nilpotenten Elemente in $\mathfrak{g}$ deshalb insbesondere mit den konkret halbeinfachen, bzw. konkret nilpotenten überein. Dies lässt sich auch mit Lemma 1.42 sehen, da $Z(\mathfrak{g}) = 0$.

3. Da $Z(\mathfrak{gl}_n(k)) = kI$ stimmen die abstrakt halbeinfachen, bzw. abstrakt nilpotenten Elemente in $\mathfrak{gl}_n(k)$ nach Lemma 1.42 mit den halbeinfachen, bzw. nilpotenten im üblichen Sinne überein, d.h. im Sinne der konkreten Jordanzerlegung überein.

4. In der abelschen Lie-Algebra

$$\mathfrak{g} \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in k \right\}$$

sind alle Elemente abstrakt halbeinfach, und 0 ist das einzige abstrakt nilpotente Element. Dieser Unterschied zu den konkret halbeinfachen und konkret nilpotenten Elementen liegt daran, dass $Z(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$ nicht aus konkret halbeinfachen Elementen besteht.

1.5.3 Cartan-Unteralgebren

In diesem Abschnitt verallgemeinern wir den Begriff einer Cartan-Unteralgebra auf reduktive Lie-Algebren und untersuchen, wie die Cartan-Unteralgebren einer reduktiven Lie-Algebra mit denen der unterliegenden halbeinfachen Lie-Algebra zusammenhängen.

Definition 1.47. Eine *Cartan-Unteralgebra* einer reduktiven Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ist eine maximale torale Unteralgebra $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ und die Elemente von $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ sind die *Wurzeln* von $\mathfrak{g}$ bezüglich $\mathfrak{h}$.

Bemerkung 1.48. 1. Eine CSA einer reduktiven Lie-Algebra besteht aus halbeinfachen Elementen und ist maximal mit dieser Eigenschaft.

2. Jedes halbeinfache Element $X \in \mathfrak{g}$ ist in einer CSA enthalten: Der von X erzeugte Untervektorraum kX ist eine torale Unteralgebra von $\mathfrak{g}$, und unter den toralen Unteralgebren, die kX enthalten, gibt es eine von maximaler Dimenison. Diese ist dann auch schon eine maximale torale Unteralgebra von $\mathfrak{g}$.

3. Insbesondere ergibt sich mit $X = 0$, dass in jeder reduktiven Lie-Algebra CSA existieren.

Beispiel 1.49. 1. Ist $\mathfrak{g}$ eine abelsche Lie-Algebra, so ist $\mathfrak{g}$ selbst die eindeutige CSA in $\mathfrak{g}$.

2. $\mathfrak{d}_n(k) \subseteq \mathfrak{gl}_n(k)$ ist nach Beispiel 1.13 eine torale Unteralgebra. Da $\mathfrak{d}_n(k)$ nach Korollar 1.44 aus halbeinfachen Elementen besteht, ergibt sich analog zu Beispiel 1.32, dass $\mathfrak{d}_n(k)$ bereits eine CSA von $\mathfrak{gl}_n(k)$ ist; es ergibt sich ebenfalls analog, dass alle CSA in $\mathfrak{gl}_n(k)$ unter der Konjugationswirkung von $\mathrm{GL}_n(k)$ konjugiert zu $\mathfrak{d}_n(k)$ sind.

Um die CSA einer reduktiven Lie-Algebra zu verstehen, genügt es, die CSA der zugrundeliegenden halbeinfachen Lie-Algebra zu verstehen. Genauer gilt die folgende Korrespondenz:

Lemma 1.50. *Es sei $\mathfrak{g}$ eine reduktive Lie-Algebra, $\mathfrak{a} := Z(\mathfrak{g})$ und $\mathfrak{s} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Dann gibt es eine Bijektion*

$$\begin{array}{ccc} \{\mathit{CSA\ in}\ \mathfrak{g}\} & \xleftrightarrow{1:1} & \{\mathit{CSA\ in}\ \mathfrak{s}\}, \\ \mathfrak{h} & \longmapsto & \mathfrak{h} \cap \mathfrak{s}, \\ \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{h}' & \longleftarrow\!\shortmid & \mathfrak{h}'. \end{array}$$

Beweis. 1. Ist $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine CSA, so ist $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$. Denn es ist $\mathfrak{a} + \mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine Unteralgebra, und da $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a} + \mathfrak{h}) = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{h}$ ist $\mathfrak{a} + \mathfrak{h}$ toral. Wegen der Maximalität von $\mathfrak{h}$ folgt, dass $\mathfrak{a} + \mathfrak{h} = \mathfrak{h}$ und somit $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{h}$.

2. Ist $\mathfrak{h}' \subseteq \mathfrak{s}$ eine torale Unteralgebra, so ist $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{h}' \subseteq \mathfrak{g}$ eine torale Unteralgebra. Denn $X \in \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{h}'$ wirkt trivial auf $\mathfrak{a}$ und halbeinfach auf $\mathfrak{s}$, und somit halbeinfach auf $\mathfrak{g}$. Also ist X halbeinfach.

3. Ist $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine torale Unteralgebra, so ist $\mathfrak{h}' := \mathfrak{h} \cap \mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{s}$ eine torale Unteralgebra. Denn als Schnitt zweier Unteralgebren ist $\mathfrak{h}'$ eine Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ und damit auch von $\mathfrak{s}$. Für $X \in \mathfrak{h}'$ ist $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} X$ halbeinfach und $\mathfrak{s}$ ist $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} X$-invariant, also ist auch $\mathrm{ad}_{\mathfrak{s}} X = (\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} X)|_{\mathfrak{s}}$ halbeinfach.

4. Ist $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine CSA, so ist $\mathfrak{h}' := \mathfrak{h} \cap \mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{s}$ eine CSA. Denn $\mathfrak{h}'$ ist toral, und wäre $\mathfrak{h}'$ keine CSA, so gebe es eine CSA $\hat{\mathfrak{h}} \subseteq \mathfrak{s}$ die $\mathfrak{h}'$ echt enthält. Da $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{s}$ und $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{h}$ ist
$$\mathfrak{h} = \mathfrak{a} \oplus (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{s}) = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{h}'.$$
Deshalb wäre $\mathfrak{a} \oplus \hat{\mathfrak{h}} \subseteq \mathfrak{g}$ eine torale Unteralgebra, die $\mathfrak{h}$ echt enthält, im Widerspruch zur Maximalität von $\mathfrak{h}$.

5. Ist $\mathfrak{h}' \subseteq \mathfrak{s}$ eine CSA, so ist $\mathfrak{h} := \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{h}' \subseteq \mathfrak{g}$ eine CSA. Denn wäre $\mathfrak{h}$ keine CSA, so gebe es eine CSA $\hat{\mathfrak{h}} \subseteq \mathfrak{g}$ die $\mathfrak{h}$ echt enthält. Da $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{s}$ und $\mathfrak{a} \subseteq \hat{\mathfrak{h}}$ wäre dann
$$\mathfrak{a} \oplus (\hat{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{s}) = \hat{\mathfrak{h}} \supsetneq \mathfrak{h} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{h}',$$
und somit $\hat{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{s} \supsetneq \mathfrak{h}'$. Da $\hat{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{s}$ eine torale Unteralgebra ist widerspricht dies der Maximalität von $\mathfrak{h}'$. □

Damit können wir viele Aussagen, die für CSA in halbeinfachen Lie-Algebren gelten, auf reduktive verallgemeinern. Wir beginnen mit Lemma 1.30.

Korollar 1.51. *Es sei $\mathfrak{g}$ eine reduktive Lie-Algebra und $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine torale Unteralgebra. Dann ist $\mathfrak{h}$ genau dann eine CSA, wenn $\mathfrak{h}$ selbstzentralisierend ist.*

Beweis. Wegen der Reduktivität von $\mathfrak{g}$ ist $\mathfrak{s} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ halbeinfach.

Ist $\mathfrak{h}$ eine CSA von $\mathfrak{g}$ so gibt es nach Lemma 1.50 eine CSA $\mathfrak{h}'$ von $\mathfrak{s}$ mit $\mathfrak{h} = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{h}'$. Nach Lemma 1.30 ist $Z_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{h}') = \mathfrak{h}'$. Da $\mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{s}$ ist damit
$$Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = Z_{Z(\mathfrak{g})}(Z(\mathfrak{g})) \oplus Z_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{h}') = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{h}' = \mathfrak{h}.$$

Ist andererseits $\mathfrak{h}$ keine CSA, so gibt es eine CSA $\mathfrak{h}'$ von $\mathfrak{g}$ die $\mathfrak{h}$ echt enthält. Da torale Unteralgebren abelsch sind ist $\mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{h}' \subseteq Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$. Also ist $\mathfrak{h}$ nicht selbstzentralisierend. □

Hieraus ergibt sich die Verträglichkeit von CSA mit passenden Unteralgebren.

Korollar 1.52. *Es sei $\mathfrak{g}$ eine reduktive Lie-Algebra, $\mathfrak{g}' \subseteq \mathfrak{g}$ eine reduktive Unteralgebra und $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine CSA mit $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}'$. Dann ist $\mathfrak{h}$ eine CSA von $\mathfrak{g}'$.*

Beweis. Da $\mathfrak{h}$ eine torale Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ ist, besteht $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} X$ aus $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}$-halbeinfachen Elementen. Für jedes $X \in \mathfrak{h}'$ ist deshalb auch $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}'} X = (\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} X)|_{\mathfrak{g}'}$ halbeinfach. Das zeigt, dass $\mathfrak{h}$ eine torale Unteralgebra von $\mathfrak{g}'$ ist.

Es ist $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$, da $\mathfrak{h}$ eine CSA von $\mathfrak{g}$ ist. Daher ist auch $Z_{\mathfrak{g}'}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$, also $\mathfrak{h}$ nach Korollar 1.51 bereits eine CSA von $\mathfrak{g}'$. □

Bemerkung 1.53. Ist $\mathfrak{g}$ eine reduktive Lie-Algebra, $\mathfrak{g}' \subseteq \mathfrak{g}$ eine reduktive Unteralgebra und $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine CSA, so ist $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}'$ zwar eine torale Unteralgebra von $\mathfrak{g}'$, aber nicht notwendigerweise eine CSA. So ist etwa $\mathfrak{h} := \mathfrak{d}_2(k)$ eine CSA von $\mathfrak{gl}_2(k)$, und
$$\mathfrak{g}' := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in k \right\}$$
eine abelsche, und damit reduktive, Unteralgebra von $\mathfrak{g}$. Die einzige CSA von $\mathfrak{g}'$ ist $\mathfrak{g}'$ selbst, weshalb $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}' = kI$ keine CSA von $\mathfrak{g}'$ ist.

1.6 Innere Automorphismen

In diesem Abschnitt gehen wir auf die Konjugationsbeziehung von CSA in halbeinfache Lie-Algebren ein und verallgemeinern diese auf reduktive Lie-Algebren. Eine besondere Rolle spielen hierbei die inneren Automorphismen einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$, die eine Untergruppe $\operatorname{Int}\mathfrak{g}$ von $\operatorname{Aut}\mathfrak{g}$ bilden. Diese können wir besser kontrollieren und verstehen als die gesamte Automorphismengruppe $\operatorname{Aut}\mathfrak{g}$. Alle Konjugationsaussagen, die wir im Folgenden treffen werden, beziehen sich auf $\operatorname{Int}\mathfrak{g}$. Dabei orientieren wir uns in unserer anfänglicher Behandlung innerer Automorphismen an [Hum72, §2.3].

Es sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra und $a\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ ein nilpotenter Endomorphismus von $\mathfrak{g}$. Dann ist

$$\exp(a) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$$

ein wohldefinierter Endomorphismus von $\mathfrak{g}$. Ist $b\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ ein weiterer nilpotenter Endomorphismus von $\mathfrak{g}$, der mit a kommutiert, so ist auch ab nilpotent und

$$\exp(ab) = \exp(a)\exp(b).$$

Insbesondere ist

$$\exp(a)\exp(-a) = \exp(0) = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$$

und somit $\exp(a) \in \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ mit $\exp(a)^{-1} = \exp(-a)$.

Ist a zusätzlich eine Derivation von $\mathfrak{g}$, also

$$a([X,Y]) = [a(X),Y] + [X,a(Y)] \quad \text{für alle } X,Y \in \mathfrak{g},$$

so ergibt sich aus der Leibniz-Regel

$$a^n([X,Y]) = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} [a^\ell(X), a^{n-\ell}(Y)] \quad \text{für alle } X,Y \in \mathfrak{g},\ n \in \mathbb{N},$$

dass $\exp(a)$ sogar ein Lie-Algebra-Automorphismus von $\mathfrak{g}$ ist. Insbesondere ist damit $\exp(\operatorname{ad} X) \in \operatorname{Aut}\mathfrak{g}$ für jedes ad-nilpotente $X \in \mathfrak{g}$.

Definition 1.54. Für eine Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ist $\operatorname{Int}\mathfrak{g} \subseteq \operatorname{Aut}\mathfrak{g}$ ist die Untergruppe, die von den Automorphismen $\exp(\operatorname{ad} X)$, mit ad-nilpotenten $X \in \mathfrak{g}$, erzeugt wird. Die Elemente von $\operatorname{Int}\mathfrak{g}$ heißen *innere Automorphismen*.

Beispiel 1.55. In der Standardbasis (e,h,f) von $\mathfrak{sl}_2(k)$ ist e nilpotent und damit auch ad-nilpotent. Bezüglich der Standardbasis ist

$$\operatorname{ad} e = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \operatorname{ad} -e = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ & 0 & -1 \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

und somit

$$\exp(\operatorname{ad} e) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \exp(\operatorname{ad} -e) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ & 1 & -1 \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt außerdem, dass

$$\exp(e) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \exp(e)^{-1} = \exp(-e) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ & 1 \end{pmatrix},$$

und die Konjugation

$$\phi\colon \mathfrak{sl}_2(k) \to \mathfrak{sl}_2(k), \quad X \mapsto \exp(e) X \exp(e)^{-1}$$

wird bezüglich der Standardbasis durch

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

dargestellt. Also ist $\phi = \exp(\operatorname{ad} e)$.

Diese Beobachtung ist kein Zufall.

Lemma 1.56. *Es sei $\mathfrak{g}$ eine lineare Lie-Algebra und $X \in \mathfrak{g}$ konkret nilpotent. Dann ist X auch* ad*-nilpotent und*

$$\exp(\operatorname{ad} X)(Y) = \exp(X)\, Y \exp(X)^{-1} \quad \textit{für alle } Y \in \mathfrak{g}.$$

Beweis. Es ist $\operatorname{ad} X = \lambda_X + \rho_{-X}$, wobei λ_X die Linksmultiplikation mit X und ρ_{-X} die Rechtsmultiplikation mit $-X$ bezeichnet. Da X nilpotent ist, sind es auch λ_X und ρ_{-X}. Für alle $Y \in \mathfrak{g}$ ist

$$\exp(\lambda_X)(Y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda_X)^n}{n!}(Y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n Y}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!} \right) Y = \lambda_{\exp(X)}(Y),$$

sowie analog auch

$$\exp(\rho_{-X}) = \rho_{\exp(-X)} = \rho_{\exp(X)^{-1}}.$$

Da λ_X und ρ_{-X} kommutieren ist daher für alle $Y \in \mathfrak{g}$

$$\begin{aligned} \exp(\operatorname{ad} X)(Y) &= \exp(\lambda_X + \rho_{-X})(Y) = \exp(\lambda_X)\exp(\rho_{-X})(Y) \\ &= \lambda_{\exp(X)} \rho_{\exp(X)^{-1}}(Y) = \exp(X) Y \exp(X)^{-1}, \end{aligned}$$

was genau die zu zeigende Aussage ist. □

Korollar 1.57. *Es sei $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}_n(k)$ eine lineare reduktive Lie-Algebra und $G \subseteq \mathrm{GL}_n(k)$ eine Untergruppe mit $\exp(X) \in G$ für jedes konkret nilpotente $X \in \mathfrak{g}$. Dann ist jeder innere Automorphismus durch Konjugation mit einem Element aus G gegeben.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{s} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Es genügt die Aussage für ad-nilpotentes $X \in \mathfrak{g}$ zu zeigen. Ist $X = X_1 + X_2$ bezüglich $\mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{s}$, so ist X_2 nach Lemma 1.41 konkret nilpotent. Deshalb ist für jedes $Y \in \mathfrak{g}$

$$\exp(\operatorname{ad} X)(Y) = \exp(\operatorname{ad} X_2)(Y) = \exp(X_2) Y \exp(X_2)^{-1},$$

wobei nach Annahme $\exp(X_2) \in G$. □

Beispiel 1.58. 1. Jeder innere Automorphismus von $\mathfrak{gl}_n(k)$ ist durch Konjugation mit einem Element $S \in \mathrm{GL}_n(k)$ gegeben.

2. Es sei $B \in \mathrm{M}_n(k)$, so dass $\mathfrak{o}(B)$ reduktiv ist. Ist $X \in \mathfrak{o}(B)$ konkret nilpotent, so ist $\exp(X) \in \mathrm{O}(B)$. Deshalb ist dann ist bereits jeder innere Automorphismus durch Konjugation mit einem Element aus $\mathrm{O}(B)$ gegeben.

Die Lie-Klammer einer reduktiven Lie-Algebra hängt nur von der Lie-Klammer der unterliegenden halbeinfachen Lie-Algebra ab. Dementsprechend lassen sich auch die inneren Automorphismen einer reduktiven Lie-Algebra durch die inneren Automorphismen der unterliegenden halbeinfachen Lie-Algebra verstehen.

Lemma 1.59. *Es sei $\mathfrak{g}$ reduktiv und $\mathfrak{s} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Dann ist $\mathfrak{s}$ invariant unter $\operatorname{Int}\mathfrak{g}$ und*

$$\begin{aligned} \operatorname{Int}\mathfrak{g} = \operatorname{Int}(Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{s}) &\cong \operatorname{Int}\mathfrak{s}, \\ \sigma &\mapsto \sigma|_{\mathfrak{s}}, \\ \mathrm{id}_{Z(\mathfrak{g})} \oplus \tau &\mapsfrom \tau. \end{aligned}$$

Beweis. Es sei $X \in \mathfrak{g}$ mit $X = X_1 + X_2$ bezüglich $\mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{s}$. Dann ist

$$\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} X = 0 \oplus \operatorname{ad}_{\mathfrak{s}} X_2 \quad \text{und} \quad \operatorname{ad}_{\mathfrak{s}} X_2 = (\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} X)|_{\mathfrak{s}},$$

und X ist genau dann ad-nilpotent in $\mathfrak{g}$, wenn X_2 ad-nilpotent in $\mathfrak{s}$ ist. Ferner gilt dann

$$\exp(\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} X) = \exp(0 \oplus \operatorname{ad}_{\mathfrak{s}} X_2) = \mathrm{id}_{Z(\mathfrak{g})} \oplus \exp(\operatorname{ad}_{\mathfrak{s}} X_2).$$

Damit ist

$$\operatorname{Int}\mathfrak{s} = \langle \exp(\operatorname{ad}_{\mathfrak{s}} X) \mid X \in \mathfrak{s} \text{ ist nilpotent} \rangle$$

und

$$\operatorname{Int}\mathfrak{g} = \left\langle \mathrm{id}_{Z(\mathfrak{g})} \oplus \exp(\operatorname{ad}_{\mathfrak{s}} X) \mid X \in \mathfrak{s} \text{ ist nilpotent} \right\rangle,$$

wodurch sich die Aussage ergibt. □

Wir kommen nun zu der grundlegenden Konjugationsaussage dieses Abschnittes. Wie wir bereits in Beispiel 1.32 gesehen haben, sind je zwei CSA von $\mathfrak{sl}_n(k)$ unter der Konjugationswirkung von $\mathrm{GL}_n(k)$ konjugiert zueinander. Dies verallgemeinert sich auf beliebige halbeinfache Lie-Algebren unter der Wirkung von $\operatorname{Int}\mathfrak{g}$. Ein Beweis findet sich in [Hum72, §16.4].

Lemma 1.60. *Ist $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Lie-Algebra so sind alle CSA von $\mathfrak{g}$ konjugiert unter $\operatorname{Int}\mathfrak{g}$, d.h. für je zwei CSA $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2 \subseteq \mathfrak{g}$ gibt es $\sigma \in \operatorname{Int}\mathfrak{g}$ mit $\sigma(\mathfrak{h}_1) = \mathfrak{h}_2$.*

Wie wir bereits in Beispiel 1.49 gesehen haben, sind auch in der reduktiven Lie-Algebra $\mathfrak{gl}_n(k)$ alle CSA unter der Konjugationswirkung von $\mathrm{GL}_n(k)$ konjugiert zueinander. Für eine beliebige reduktive Lie-Algebra ergibt sich dies als Verallgemeinerung von Lemma 1.60.

Korollar 1.61. *Ist $\mathfrak{g}$ eine reduktive Lie-Algebra, so sind alle CSA von $\mathfrak{g}$ konjugiert unter* $\operatorname{Int}\mathfrak{g}$.

Beweis. Es seien $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2 \subseteq \mathfrak{g}$ zwei CSA. Nach Lemma 1.50 gibt es in $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ zwei CSA $\mathfrak{h}_1', \mathfrak{h}_2'$ mit $\mathfrak{h}_1 = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{h}_1'$ und $\mathfrak{h}_2 = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{h}_2'$. Nach Lemma 1.60 gibt es $\tau \in \operatorname{Int}[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ mit $\tau(\mathfrak{h}_1') = \mathfrak{h}_2'$. Nach Lemma 1.59 ist $\sigma := \mathrm{id}_{Z(\mathfrak{g})} \oplus \tau \in \operatorname{Int}\mathfrak{g}$ mit

$$\sigma(\mathfrak{h}_1) = (\mathrm{id}_{Z(\mathfrak{g})} \oplus \tau)(Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{h}_1') = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{h}_2' = \mathfrak{h}_2. \qquad \square$$

Ist $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}_n(k)$ eine reduktive Unteralgebra, so wird $\operatorname{Int}\mathfrak{g}$ durch die Konjugationen mit $\exp(X)$ für konkret nilpotente $X \in \mathfrak{g}$ erzeugt. Für diese X ist die Konjugation mit $\exp(X)$ auch ein innerer Automorphismus von $\mathfrak{gl}_n(k)$. Daher lässt sich jeder innere Automorphismus von $\mathfrak{g}$ zu einem inneren Automorphismus von $\mathfrak{gl}_n(k)$ fortsetzen. Diese Beobachtung können wir auf beliebige reduktive Lie-Algebren verallgemeinern.

Lemma 1.62. *Es sei $\mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{s}$ eine reduktive Lie-Algebra und $\mathfrak{g}' \subseteq \mathfrak{g}$ eine reduktive Unteralgebra mit $\mathfrak{g}' = Z(\mathfrak{g}') \oplus \mathfrak{s}'$. Dann lässt sich jeder innere Automorphismus von $\mathfrak{g}'$ zu einem inneren Automorphismus von $\mathfrak{g}$ fortsetzen.*

Beweis. Es genügt die Aussage für $\exp(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}'} X)$ für $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}'}$-nilpotentes $X \in \mathfrak{g}'$ zu zeigen. Hierfür sei $X = X_1 + X_2$ bezüglich $\mathfrak{g}' = Z(\mathfrak{g}') \oplus \mathfrak{s}'$.

Nach Lemma 1.41 ist X_2 ein nilpotentes Element der halbeinfachen Lie-Algebra $\mathfrak{s}'$. Mit der Inklusion $\mathfrak{g}' \hookrightarrow \mathfrak{g}$ folgt aus Lemma 1.38, dass $X_2 \in \mathfrak{s}$. Aus der Funktorialität der Jordanzerlegung (Lemma 1.18) ergibt sich außerdem, dass X_2 bereits ein nilpotentes Element von $\mathfrak{s}$ ist.

Also ist $\mathrm{ad}_{\mathfrak{s}} X_2$ nilpotent und damit auch $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} X_2 = 0 \oplus (\mathrm{ad}_{\mathfrak{s}} X_2)$ nilpotent. Damit ist $\exp(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} X_2) \in \operatorname{Int}\mathfrak{g}$, und es gilt

$$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}'} X = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}'} X_2 = (\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} X_2)|_{\mathfrak{g}'}$$

ist

$$\exp(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}'} X) = \exp(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} X_2)|_{\mathfrak{g}'}.$$

Also ist $\exp(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} X_2)$ eine Fortsetzung von $\exp(\mathrm{ad}_{g'} X)$ auf $\mathfrak{g}$. $\square$

2 Klassifikation halbeinfacher Orbiten

Jede halbeinfache Matrix ist konjugiert zu einer Diagonalmatrix, und je zwei Diagonalmatrizen sind genau dann konjugiert zueinander, wenn sie bis auf Reihenfolge die gleichen Diagonaleinträge mit jeweils gleicher Vielfachheit aufweisen. Die Orbiten der halbeinfachen Elemente in $\mathfrak{gl}_n(k)$ unter der Konjugationswirkung von $\mathrm{GL}_n(k)$ werden deshalb durch die Orbiten k^n/S_n parametrisiert, wobei S_n durch Permutation der Einträge auf k^n wirkt, indem man einem Orbit $[(a_1, \dots, a_n)]$ die Konjugationsklasse der Diagonalmatrix $\mathrm{diag}(a_1, \dots, a_n)$ zuordnet.

In diesem Kapitel verallgemeinern wir dieses Vorgehen eine allgemeine reduktive Lie-Algebra $\mathfrak{g}$, indem wir davon ausgehen, dass auf dieser eine Wirkung durch eine Gruppe G gegeben ist. Wir zeigen, dass unter gewissen Voraussetzungen an diese Gruppenwirkung die halbeinfachen Elemente in $\mathfrak{g}$ invariant unter G sind, und dass sich aus jeder CSA $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ ein Repräsentantensystem der G-Orbiten halbeinfacher Elemente wählen lässt. Insbesondere erhalten wir damit in Theorem 2.19, dass sich die G-Orbiten der halbeinfachen Elemente in $\mathfrak{g}$ durch den Quotienten $\mathfrak{h}/N_G(\mathfrak{h})$ identifizieren lassen.

Bevor wir diesen abstrakten Fall behandeln, kehren wir allerdings zu dem Spezialfall der reduktiven Lie-Algebra $\mathfrak{gl}_n(k)$ zurück, und formulieren für diese Theorem 2.8 als Spezialfall von Theorem 2.19. Dabei betrachten wir als Gruppenwirkung die Konjugationswirkung von $\mathrm{GL}_n(k)$, und fixieren eine beliebige CSA in $\mathfrak{gl}_n(k)$. Durch die Wahl der Diagonalmatrizen $\mathfrak{d}_n(k)$ als CSA erhalten wir anschließend in Korollar 2.10 aus Theorem 2.8 erneut die Parametrisierung der GL_n-Orbiten halbeinfacher Elemente in $\mathfrak{g}$, also der Konjugationsklassen halbeinfacher Elemente, durch k^n/S_n.

2.1 Klassifikationssatz für $\mathfrak{gl}_n(k)$

Definition 2.1. Für $X \in \mathfrak{gl}_n(k)$ sei

$$\mathcal{O}_X \coloneqq \{SXS^{-1} \mid S \in \mathrm{GL}_n(k)\}$$

der *Orbit* von X unter der Wirkung von $\mathrm{GL}_n(k)$. Ein Orbit $\mathcal{O} \subseteq \mathfrak{g}$ heißt *halbeinfach*, falls er aus halbeinfachen Elementen besteht. Mit

$$\mathcal{S}(\mathfrak{gl}_n(k), \mathrm{GL}_n(k)) \coloneqq \{\mathcal{O} \subseteq \mathfrak{g} \mid \mathcal{O} \text{ ist ein halbeinfacher Orbit}\}$$

wird die Menge der halbeinfachen Orbiten bezeichnet.

Ob ein Element $X \in \mathfrak{gl}_n(k)$ halbeinfach ist, hängt nur von seinen Orbit ab: Da X genau dann halbeinfach ist, wenn SXS^{-1} für alle $S \in \mathrm{GL}_n(k)$ halbeinfach ist, ist X genau dann halbeinfach, wenn der Orbit $\mathcal{O}_X$ halbeinfach ist.

Unser erster Schritt zur Bestimmung der halbeinfachen Orbiten $\mathcal{S}(\mathfrak{gl}_n(k), \mathrm{GL}_n(k))$ besteht darin, den Zentralisator eines halbeinfachen Elementes zu verstehen.

Lemma 2.2. *Ist $\mathfrak{g} := \mathfrak{gl}_n(k)$ und $X \in \mathfrak{g}$ halbeinfach, so ist $\mathfrak{g}^X$ reduktiv.*

Beweis. Da X halbeinfach (also diagonalisierbar) ist, gibt es $S \in \mathrm{GL}_n(k)$ mit

$$SXS^{-1} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_1, \ldots, \lambda_r, \ldots, \lambda_r), \tag{1}$$

wobei $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$, und λ_i mit einer Vielfachheit $n_i \in \mathbb{N}$, $n > 1$ vorkommt. Konjugation mit S ist ein Automorphismus von $\mathfrak{gl}_n(k)$, der X auf SXS^{-1} abbildet, und damit auch $\mathfrak{g}^X$ auf $\mathfrak{g}^{SXS^{-1}}$. Es genügt daher die Aussage unter der Annahme zu zeigen, dass X bereits eine Diagonalmatrix der Form (1) ist. Es sei dann

$$X = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_1, \ldots, \lambda_r, \ldots, \lambda_r) = \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n) \tag{2}$$

und $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{g}$. Der (i,j)-te Eintrag von AX ist dann $\mu_j a_{ij}$ und der (i,j)-te Eintrag von XA ist $\mu_i a_{ij}$. Deshalb ist genau dann $A \in \mathfrak{g}^X$, wenn

$$\mu_i = \mu_j \quad \text{oder} \quad a_{ij} = 0 \quad \text{für alle } i, j = 1, \ldots, n.$$

Aus (2) und $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$ folgt deshalb, dass

$$\mathfrak{g}^X = \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_r \end{pmatrix} \,\middle|\, A_1 \in \mathfrak{gl}_{n_1}(k), \ldots, A_r \in \mathfrak{gl}_{n_r}(k) \right\}.$$

Deshalb ist

$$\mathfrak{g}^X \cong \mathfrak{gl}_{n_1}(k) \times \cdots \times \mathfrak{gl}_{n_r}(k),$$

und somit insbesondere reduktiv. □

Aus dem Beweis von Lemma 2.2 ergibt sich als Spezialfall die folgende Beobachtung.

Korollar 2.3. *Es sei $\mathfrak{g} := \mathfrak{gl}_n(k)$ und $X \in \mathfrak{g}$ eine reguläre Diagonalmatrix. Dann ist $\mathfrak{g}^X = \mathfrak{d}_n(k)$.*

Hieraus folgt wiederum ein nützlichen Kriterium zur Konstruktion von CSA in linearen reduktiven Lie-Algebren.

Korollar 2.4. *Es sei $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}_n(k)$ eine reduktive Unteralgebra, die eine reguläre Diagonalmatrix X enthält. Dann ist $\mathfrak{d}_n(k) \cap \mathfrak{g}$ eine CSA von $\mathfrak{g}$.*

Beweis. Wie bereits in Beispiel 1.49 bemerkt, ist $\mathfrak{d}_n(k)$ eine CSA von $\mathfrak{gl}_n(k)$. Deshalb ist zum einen $Z_{\mathfrak{gl}_n(k)}(\mathfrak{d}_n(k)) = \mathfrak{d}_n(k)$, und zum anderen $\mathfrak{h} := \mathfrak{d}_n(k) \cap \mathfrak{g}$ eine torale Unteralgebra von $\mathfrak{gl}_n(k)$, und damit auch von $\mathfrak{g}$. Nach Annahme ist X regulär, weshalb nach Korollar 2.3 $Z_{\mathfrak{gl}_n(k)}(X) = \mathfrak{d}_n(k)$. Da $X \in \mathfrak{h}$ ist deshalb

$$Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \subseteq Z_{\mathfrak{gl}_n(k)}(X) \cap \mathfrak{g} = \mathfrak{d}_n(k) \cap \mathfrak{g} = \mathfrak{h},$$

und $\mathfrak{h}$ somit selbstzentralisierend in $\mathfrak{g}$. Nach Korollar 1.51 ist $\mathfrak{h}$ deshalb bereits eine CSA von $\mathfrak{g}$. □

Bemerkung 2.5. Beliebige Zentralisatoren in reduktiven Lie-Algebren sind nicht notwendigerweise reduktiv. Es sei etwa $\mathfrak{g} := \mathfrak{gl}_3(k)$ und

$$X := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}.$$

Durch direktes Nachrechnen ergibt sich, dass

$$\mathfrak{g}^X = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ & d & e \\ & & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b, c, d, e \in k \right\}.$$

Dann ergibt sich auch, dass

$$Z(\mathfrak{g}^X) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ & a & 0 \\ & & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in k \right\}.$$

Außerdem ist $[\mathfrak{g}^X, \mathfrak{g}^X] \subseteq [\mathfrak{t}_3(k), \mathfrak{t}_3(k)] = \mathfrak{n}_3(k)$. Da $\mathfrak{g}^X$ schon nicht in $Z(\mathfrak{g}^X) \oplus \mathfrak{n}_3(k)$ enthalten ist, muss dann $\mathfrak{g}^X \neq Z(\mathfrak{g}^X) \oplus [\mathfrak{g}^X, \mathfrak{g}^X]$ sein.

Wir zeigen nun, dass eine beliebigen CSA $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{gl}_n(k)$ die halbeinfachen Orbiten in $\mathcal{S}(\mathfrak{gl}_n(k), \mathrm{GL}_n(k))$ alle nichttrivial schneidet, und erhalten hieraus das versprochene Theorem.

Lemma 2.6. *Es sei $\mathfrak{g} := \mathfrak{gl}_n(k)$, $\mathcal{O} \subseteq \mathfrak{g}$ ein halbeinfacher Orbit und $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine CSA. Dann gibt es $X \in \mathfrak{h}$ mit $\mathcal{O} = \mathcal{O}_X$.*

Beweis. Es sei $X' \in \mathcal{O}$, also $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{X'}$. Dann ist X' halbeinfach, da $\mathcal{O}$ ein halbeinfacher Orbit ist. Also ist X' in einer CSA $\mathfrak{h}' \subseteq \mathfrak{g}$ enthalten. Wie bereits in Beispiel 1.49 gesehen sind alle CSA von $\mathfrak{g}$ konjugiert unter $\mathrm{GL}_n(k)$. Also gibt es $S \in \mathrm{GL}_n(k)$ mit $S\mathfrak{h}'S^{-1} = \mathfrak{h}$. Insbesondere ist $SX'S^{-1} \in \mathfrak{h}$ mit

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}_{X'} = \mathcal{O}_{SX'S^{-1}}.$$ □

Definition 2.7. Ist $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{gl}_n(k)$ eine CSA, so sei

$$W(\mathfrak{h}, \mathrm{GL}_n(k)) := N_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h}) / Z_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h}),$$

wobei $N_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h})$ den Normalisator und $Z_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h})$ den Zentralisator bezeichnet.

Ist $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{gl}_n(k)$ eine CSA, so induziert die Wirkung von $\mathrm{GL}_n(k)$ auf $\mathfrak{g}$ eine Wirkung der Gruppe $W(\mathfrak{h}, \mathrm{GL}_n(k))$ auf $\mathfrak{h}$.

Theorem 2.8 (Klassifikationssatz für $\mathfrak{gl}_n(k)$)**.** *Es sei $\mathfrak{g} := \mathfrak{gl}_n(k)$ und $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine CSA. Dann ist die Abbildung*

$$\begin{aligned} \Phi \colon \mathfrak{h}/W(\mathfrak{h}, \mathrm{GL}_n(k)) &\xrightarrow{\sim} \mathcal{S}(\mathfrak{gl}_n(k), \mathrm{GL}_n(k)) \\ [X] &\longmapsto \mathcal{O}_X \end{aligned}$$

eine wohldefinierte Bijektion.

Beweis. Es genügt die Aussage für $N_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h})$ statt für $W(\mathfrak{h}, \mathrm{GL}_n(k))$ zu zeigen, da eine Gleichheit von Orbiten $\mathfrak{h}/N_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}/W(\mathfrak{h}, \mathrm{GL}_n(k))$ gilt.

Da $\mathfrak{h}$ eine CSA von $\mathfrak{g}$ ist, besteht $\mathfrak{h}$ nach Korollar 1.44 aus halbeinfachen Elementen. Deshalb ist $\mathcal{O}_X$ für jedes $X \in \mathfrak{h}$ ein halbeinfacher Orbit. Also ist die Abbildung

$$\tilde{\Phi}\colon \mathfrak{h} \to \mathcal{S}(\mathfrak{gl}_n(k), \mathrm{GL}_n(k)), \quad X \mapsto \mathcal{O}_X$$

wohldefiniert. Nach Lemma 2.6 ist $\tilde{\Phi}$ surjektiv. Für $X \in \mathfrak{h}$ ist $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_{SXS^{-1}}$ für alle $S \in \mathrm{GL}_n(k)$, insbesondere also für alle $S \in N_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h})$. Also faktorisiert $\tilde{\Phi}$ über eine wohldefinierte Abbildung

$$\Phi\colon \mathfrak{h}/N_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h}) \to \mathcal{S}(\mathfrak{gl}_n(k), \quad \mathrm{GL}_n(k)), [X] \mapsto \mathcal{O}_X.$$

Insbesondere ist Φ ebenfalls surjektiv.

Für die Injektivität von Φ gilt es zu zeigen, dass $X_1, X_2 \in \mathfrak{h}$ mit $\mathcal{O}_{X_1} = \mathcal{O}_{X_2}$ bereits durch ein Element aus $N_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h})$ konjugiert sind. Da $\mathcal{O}_{X_1} = \mathcal{O}_{X_2}$ gilt, gibt es zumindest $T \in \mathrm{GL}_n(k)$ mit $TX_2T^{-1} = X_1$. Da Konjugation mit T ein Automorphismus von $\mathfrak{g}$ ist, sind $\mathfrak{h}$ und $T\mathfrak{h}T^{-1}$ zwei CSA von $\mathfrak{g}$, die X_1 enthalten. Da CSA abelsch sind, folgt, dass bereits $\mathfrak{h}, T\mathfrak{h}T^{-1} \subseteq \mathfrak{g}^{X_1}$. Nach Lemma 2.2 ist $\mathfrak{g}^{X_1}$ reduktiv, und nach Korollar 1.52 sind $\mathfrak{h}$ und $T\mathfrak{h}T^{-1}$ daher zwei CSA von $\mathfrak{g}^{X_1}$.

Nach Korollar 1.61 gibt es somit $\sigma \in \operatorname{Int} \mathfrak{g}^{X_1}$ mit $\sigma(T\mathfrak{h}T^{-1}) = \mathfrak{h}$. Ist $Y \in \mathfrak{g}^{X_1}$ nilpotent, so ist $(\operatorname{ad}_{Z_{\mathfrak{g}}(X_1)} Y)(X_1) = 0$, somit

$$\exp(Y)X_1 \exp(Y)^{-1} = \exp(\operatorname{ad}_{Z_{\mathfrak{g}}(X_1)} Y)(X_1) = X_1,$$

und deshalb $\exp(Y) \in Z_{\mathrm{GL}_n(k)}(X_1)$. Nach Korollar 1.57 ist daher σ durch Konjugation mit einem Element $S \in Z_{\mathrm{GL}_n(k)}(X)$ gegeben.

Zusammengefasst ist daher

$$(ST)X_2(ST)^{-1} = STX_2T^{-1}S^{-1} = SX_1S^{-1} = X_1,$$

und da

$$(ST)\mathfrak{h}(ST)^{-1} = ST\mathfrak{h}T^{-1}S^{-1} = \sigma(T\mathfrak{h}T^{-1}) = \mathfrak{h},$$

ist auch $ST \in N_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h})$. Also sind X_2 und X_1 durch ein Element aus $N_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h})$ konjugiert zueinander. $\square$

Wir wollen nun Theorem 2.8 für eine konkrete Berechnung der halbeinfachen Orbiten in $\mathfrak{g} := \mathfrak{gl}_n(k)$ nutzen.

Um Theorem 2.8 anzuwenden, müssen wir eine CSA $\mathfrak{h}$ von $\mathfrak{g}$ wählen; wir entscheiden uns für die Diagonalmatrizen $\mathfrak{h} := \mathfrak{d}_n(k)$. Um die Orbiten $\mathfrak{h}/W(\mathfrak{h}, \mathrm{GL}_n(k))$ zu bestimmen, berechnen wir zunächst $N_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h})$ und $Z_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h})$, und anschließend $W(\mathfrak{h}, \mathrm{GL}_n(k))$ selbst. Entscheidend hierfür ist, dass $\mathfrak{h}$ eine reguläre Diagonalmatrix enthält.

Aus Korollar 2.3 folgt damit bereits, dass $Z_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h})$ aus Diagonalmatrizen besteht, also $Z_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h}) \subseteq \mathrm{D}_n(k)$. Da Diagonalmatrizen kommutieren, gilt damit schon $\mathrm{D}_n(k) \subseteq Z_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h})$. Zur Berechnung von $N_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h})$ wollen wir die folgende Aussage festhalten.

Lemma 2.9. *Es sei $U \subseteq \mathfrak{d}_n(k)$ eine Teilmenge, und es gebe eine reguläre Diagonalmatrix $X \in U$. Unter der Konjugationswirkung von $\mathrm{GL}_n(k)$ auf $\mathfrak{gl}_n(k)$ besteht dann*

$$N_{\mathrm{GL}_n(k)}(U) = \{S \in \mathrm{GL}_n(k) \mid SUS^{-1} = U\}$$

aus Monomialmatrizen.

Beweis. Es ist $X = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ mit $\lambda_i \neq \lambda_j$ für alle $i \neq j$. Es sei $S \in N_{\mathrm{GL}_n(k)}(U)$ mit Einträgen $S = (s_{ij})$. Dann ist auch $SXS^{-1} \in U$, also $SXS^{-1} = \mathrm{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$ für passende $\mu_1, \dots, \mu_n \in k$, und somit

$$SX = \mathrm{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)S.$$

Der (i, j)-te Eintrag auf der linken Seite ist $\lambda_j s_{ij}$, der (i, j)-te Eintrag auf der rechten Seite $\mu_i s_{ij}$. Es ist also

$$\lambda_j s_{ij} = \mu_i s_{ij} \quad \text{für alle } i, j = 1, \dots, n.$$

Für alle $i, j, j' = 1, \dots, n$ ist damit

$$\lambda_j s_{ij} s_{ij'} = \mu_i s_{ij} s_{ij'} = s_{ij}(\mu_i s_{ij'}) = s_{ij}(\lambda_{j'} s_{ij'}) = \lambda_{j'} s_{ij} s_{ij'}.$$

Da $\lambda_j \neq \lambda_{j'}$ für $j \neq j'$ ist damit $s_{ij} s_{ij'} = 0$ für alle $i = 1, \dots, n$ und $j \neq j'$. In jeder Zeile hat S also höchstens einen Eintrag, der verschieden von 0 ist. Da S invertierbar ist, befindet sich in jeder Zeile auch mindestens ein Eintrag, der verschieden von 0 ist. Also ist in jeder Zeile von S genau ein Eintrag verschieden von 0.

Da mit $S \in N_{\mathrm{GL}_n(k)}(U)$ auch $S^{-1} \in N_{\mathrm{GL}_n(k)}(U)$ gibt es auch $\mu_1, \dots, \mu_n \in k$ mit $\mathrm{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) \in U$ und

$$XS = S \,\mathrm{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n).$$

Hieraus ergibt sich analog zur obigen Rechnung, dass S in jeder Spalte genau einen Eintrag hat, der verschieden von 0 ist. $\square$

Da $\mathfrak{h}$ eine reguläre Diagonalmatrix enthält, ist $N_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h}) \subseteq \mathrm{Mon}_n(k)$ nach Lemma 2.9. Andererseits wird $\mathfrak{h}$ von $\mathrm{D}_n(k)$ und $\mathrm{P}_n(k)$ normalisiert, und damit auch von $\mathrm{Mon}_n(k) = \mathrm{D}_n(k) \rtimes \mathrm{P}_n(k)$. Also ist $N_{\mathrm{GL}_n(k)} = \mathrm{Mon}_n(k)$. Somit ist

$$\begin{aligned} W(\mathfrak{h}, \mathrm{GL}_n(k)) &\coloneqq N_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h})/Z_{\mathrm{GL}_n(k)} = \mathrm{Mon}_n(k)/\mathrm{D}_n(k) \\ &= (\mathrm{D}_n(k) \rtimes \mathrm{P}_n(k))/\mathrm{D}_n(k) \cong \mathrm{P}_n(k) \cong S_n, \end{aligned}$$

wobei die Wirkung von $W(\mathfrak{h}, \mathrm{GL}_n(k))$ auf $\mathfrak{h}$ der Permutation der Diagonaleinträge durch S_n entspricht. Zusammen mit der zusätzliche Identifikation

$$k^n \cong \mathfrak{h}, \quad (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mapsto \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

ergibt sich damit die Klassifikation der halbeinfachen Orbiten in $\mathfrak{gl}_n(k)$ unter der Konjugationswirkung von $\mathrm{GL}_n(k)$:

Korollar 2.10. *Es gibt eine wohldefinierte Bijektion*

$$\begin{aligned} k^n/S_n &\xrightarrow{\sim} \mathcal{S}(\mathfrak{gl}_n(k), \mathrm{GL}_n(k)), \\ [(\lambda_1, \dots, \lambda_n)] &\longmapsto \mathcal{O}_{\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)}, \end{aligned}$$

wobei S_n auf k^n durch Permutation der Einträge wirkt.

2.2 Reduktive Lie-Algebren

In diesem Abschnitt verallgemeinern wir das für $\mathfrak{gl}_n(k)$ und $\mathrm{GL}_n(k)$ beschriebene Vorgehen auf beliebige reduktive Lie-Algebren unter passenden Gruppenwirkungen. Entscheidend ist hierbei, dass wir, wie bereits für $\mathfrak{gl}_n(k)$, Cartan-Unteralgebren und ihr Konjugationsverhalten ausnutzen wollen.

In diesem Abschnitt bezeichnet $\mathfrak{g}$ eine reduktive Lie-Algebra, und G eine Gruppe, die per Lie-Algebra-Homomorphismen auf $\mathfrak{g}$ wirkt.

Definition 2.11. Für $X \in \mathfrak{g}$ ist

$$\mathcal{O}_X \coloneqq \{s \cdot X \mid s \in G\}$$

der *Orbit* von X unter G. Ein Orbit $\mathcal{O} \subseteq \mathfrak{g}$ heißt *halbeinfach*, wenn $\mathcal{O}$ aus halbeinfachen Elementen besteht. Mit

$$\mathcal{S}(\mathfrak{g}, G) \coloneqq \{\mathcal{O} \subseteq \mathfrak{g} \mid \mathcal{O} \text{ ist ein halbeinfacher } G\text{-Orbit}\}$$

wird die Menge der halbeinfachen Orbiten bezeichnet.

Für $X \in \mathfrak{g}$ ist

$$\operatorname{ad} \phi(X) = \phi(\operatorname{ad} X)\phi^{-1} \quad \text{für alle } \phi \in \operatorname{Aut} \mathfrak{g}.$$

Deshalb ist X genau dann halbeinfach, wenn der Orbit $\mathcal{O}_X$ halbeinfach ist.

Für das weitere Vorgehen stellen wir an die Wirkung von G auf $\mathfrak{g}$ die zusätzliche Bedingung, dass es für jedes $\sigma \in \operatorname{Int} \mathfrak{g}$ ein $s \in G$ gibt, das durch σ auf $\mathfrak{g}$ wirkt.

Beispiel 2.12. 1. $\mathrm{GL}_n(k)$ wirkt durch Konjugation auf $\mathfrak{gl}_n(k)$ und nach Korollar 1.57 ist jeder innere Automorphismus von $\mathfrak{gl}_n(k)$ durch Konjugation mit einem Element aus $\mathrm{GL}_n(k)$ gegeben.

Analoges gilt für die Konjugationswirkung von $\mathrm{GL}_n(k)$ auf $\mathfrak{sl}_n(k)$.

2. Es sei $B \in \mathrm{M}_n(k)$, so dass

$$\mathfrak{o}(B) = \{A \in \mathfrak{gl}_n(k) \mid A^\top B + BA = 0\}$$

reduktiv ist. Dann wirkt die Gruppe

$$\mathrm{O}(B) = \{S \in \mathrm{GL}_n(k) \mid S^\top BS = B\}$$

durch Konjugation auf $\mathfrak{o}(B)$, und für konkret nilpotentes $X \in \mathfrak{o}(B)$ ergibt sich durch explizites Nachrechnen, dass $\exp(X) \in \mathrm{O}(B)$. Also ist nach Korollar 1.57 jeder innere Automorphismus von $\mathfrak{o}(B)$ durch Konjugation mit einem Element aus $\mathrm{O}(B)$ gegeben. Hieraus ergeben sich die folgenden konkrete Beispiele.

a) Für $B = 0$ ergibt sich erneut die Konjugationswirkung von $\mathrm{GL}_n(k)$ auf $\mathfrak{gl}_n(k)$

b) Wie bereits in Beispiel 1.6 gesehen ist $\mathfrak{so}_n(k)$ für alle $n \geq 1$ reduktiv. Für die Einheitsmatrix $I_n \in \mathrm{M}_n(k)$ ergibt sich die Konjugationswirkung der orthogonalen Gruppe

$$\mathrm{O}_n(k) \coloneqq \mathrm{O}(I_n) = \{S \in \mathrm{GL}_n(k) \mid S^\top = S^{-1}\}$$

auf $\mathfrak{so}_n(k) = \mathfrak{o}(I_n)$.

c) Wie bereits in Beispiel 1.6 gesehen ist $\mathfrak{sp}_{2n}(k)$ für alle $n \geq 1$ halbeinfach, und somit ebenfalls reduktiv. Daher ergibt sich für

$$\Omega = \begin{pmatrix} & I_n \\ -I_n & \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2n}(k)$$

die Konjugationswirkung der symplektischen Gruppe

$$\mathrm{Sp}_{2n}(k) := \mathrm{O}(\Omega) = \{S \in \mathrm{GL}_{2n}(k) \mid S^\top \Omega S = \Omega\}$$

auf $\mathfrak{sp}_{2n}(k) = \mathfrak{o}(\Omega)$.

3. Ist $G \subseteq \operatorname{Aut}\mathfrak{g}$ eine Untergruppe, so wirkt G auf naheliegende Weise auf $\mathfrak{g}$, und G erfüllt die gewünschte Bedingung genau dann, wenn $\operatorname{Int}\mathfrak{g} \subseteq G$. Spezialfälle hiervon sind $\operatorname{Int}\mathfrak{g}$ selbst sowie $\operatorname{Aut}\mathfrak{g}$.

Ist $X \in \mathrm{M}_n(k)$ konkret nilpotent, so ist $\det\exp(X) = 1$. Denn da X nilpotent ist, gibt es $S \in \mathrm{GL}_n(k)$, so dass SXS^{-1} eine echte obere Dreiecksmatrix ist. Deshalb ist $\sum_{m=1}^{\infty}(SXS^{-1})^m/m!$ eine echte obere Dreiecksmatrix, und somit $\exp(SXS^{-1})$ eine obere Dreiecksmatrix mit Einsen auf der Diagonalen. Daraus folgt, dass

$$1 = \det(\exp(SXS^{-1})) = \det(S\exp(X)S^{-1}) = \det(\exp(X)).$$

Wir erhalten daher aus Beispiel 2.12 noch weitere Beispiele:

Beispiel 2.13. 1. Statt der Konjugationswirkung von $\mathrm{GL}_n(k)$ auf $\mathfrak{gl}_n(k)$ und $\mathfrak{sl}_n(k)$ lässt sich auch die Konjugationswirkung von $\mathrm{SL}_n(k)$ auf $\mathfrak{gl}_n(k)$ und $\mathfrak{sl}_n(k)$ betrachten.

2. Ist $B \in \mathrm{M}_n(k)$, so dass $\mathfrak{o}(B)$ reduktiv ist, so ist jeder innere Automorphismus von $\mathfrak{o}(B)$ bereits durch Konjugation mit einem Element aus

$$\mathrm{SO}(B) = \{S \in \mathrm{O}(B) \mid \det(S) = 1\}$$

gegeben. Insbesondere ergibt sich für $B = I_n$ die Konjugationswirkung von

$$\mathrm{SO}_n(k) := \{S \in \mathrm{O}_n(k) \mid \det S = 1\}$$

auf $\mathfrak{so}_n(k)$.

3. Ist $\mathfrak{g}$ reduktiv, so ist für jedes ad-nilpotente $X \in \mathfrak{g}$ bereits $\exp(\operatorname{ad} X) \in \mathrm{SL}(\mathfrak{g})$ und somit

$$\operatorname{Int}\mathfrak{g} \subseteq \{\phi \in \operatorname{Aut}\mathfrak{g} \mid \det\phi = 1\}.$$

Wir wollen uns nun der Klassifikation der halbeinfachen Orbiten zuwenden. Motiviert von Lemma 2.2 besteht unser erster Schritt darin, die Zentralisatoren halbeinfacher Elemente zu verstehen. Wir nutzen im Folgenden die Eigenschaften und Notationen der Wurzelraumzerlegung aus Proposition 1.33, und legen dem Leser gegebenenfalls nahe, sich noch einmal mit diesen vertraut zu machen.

Proposition 2.14. *Es sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Lie-Algebra, $X \in \mathfrak{g}$ ein halbeinfaches Element, und $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine CSA, die X enthält. Es seien $\Phi := \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ die entsprechenden Wurzeln und*

$$\Phi_X := \{\alpha \in \Phi \mid \alpha(X) = 0\}. \tag{3}$$

Dann ist

$$\mathfrak{g}^X = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi_X} \mathfrak{g}_\alpha, \tag{4}$$

und der Zentralisator $\mathfrak{g}^X$ ist reduktiv.

Beweis. Es sei

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha \tag{5}$$

die Wurzelraumzerlegung von $\mathfrak{g}$ bezüglich $\mathfrak{h}$. Hat $Y \in \mathfrak{g}$ bezüglich (5) die Zerlegung $Y = Y_0 + \sum_{\alpha \in \Phi} Y_\alpha$, so ist

$$[X, Y] = \sum_{\alpha \in \Phi} \alpha(X) Y_\alpha.$$

Daraus folgt mit der Direktheit der Zerlegung (5), dass

$$Y \in \mathfrak{g}^X \Leftrightarrow \alpha(X) Y_\alpha = 0 \text{ für alle } \alpha \in \Phi.$$

Hieraus ergibt sich (4).

Das Zentrum von $\mathfrak{g}^X$ ergibt sich als

$$Z(\mathfrak{g}^X) = \bigcap_{\alpha \in \Phi_X} \ker \alpha. \tag{6}$$

Es ist nämlich $Z(\mathfrak{g}^X) \subseteq Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$, und für $Y \in \mathfrak{h}$ ist $[Y, \mathfrak{g}^X] = \bigoplus_{\alpha \in \Phi_X} \alpha(Y) \mathfrak{g}_\alpha$, also genau dann $[Y, \mathfrak{g}^X] = 0$, wenn $\alpha(Y) = 0$ für alle $\alpha \in \Phi_X$.

Für die Reduktivität von $\mathfrak{g}^X$ gilt es zu zeigen, dass $Z(\mathfrak{g}^X) = \operatorname{rad} \mathfrak{g}^X$. Da bereits $Z(\mathfrak{g}^X) \subseteq \operatorname{rad} \mathfrak{g}^X$ genügt es zu zeigen, dass $\operatorname{rad} \mathfrak{g}^X \subseteq Z(\mathfrak{g}^X)$. Entscheidend hierfür ist die folgende Beobachtung:

Behauptung 1. Es gibt kein $\alpha \in \Phi_X$ mit $\mathfrak{g}_\alpha \subseteq \operatorname{rad} \mathfrak{g}^X$.

Beweis. Angenommen es gebe $\alpha \in \Phi_X$ mit $\mathfrak{g}_\alpha \subseteq \operatorname{rad} \mathfrak{g}^X$. Da $\alpha \in \Phi_X$ ist dann auch $-\alpha \in \Phi_X$ und somit $\mathfrak{g}_{-\alpha} \subseteq \mathfrak{g}^X$. Damit ist auch $kH_\alpha = [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subseteq \operatorname{rad} \mathfrak{g}^X$ und $\mathfrak{g}_{-\alpha} = [H_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subseteq \operatorname{rad} \mathfrak{g}^X$, da $\operatorname{rad} \mathfrak{g}^X$ ein Ideal in $\mathfrak{g}^X$ ist. Es ist also

$$S_\alpha = \mathfrak{g}_\alpha \oplus kH_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha} \subseteq \operatorname{rad} \mathfrak{g}^X.$$

Dies steht im Widerspruch dazu, dass $S_\alpha \cong \mathfrak{sl}_2(k)$ nicht auflösbar ist (hier nutzen wir, dass $\operatorname{char} k \neq 0$). ☐

Behauptung 2. Es gibt $H \in \mathfrak{h}$ mit $\alpha(H) \neq 0$ für alle $\alpha \in \Phi$ und $\alpha(H) \neq \beta(H)$ für alle $\alpha, \beta \in \Phi$ mit $\alpha \neq \beta$.

Beweis. Wegen des Isomorphismus $\mathfrak{h} \to \mathfrak{h}^{**}, H \mapsto (\phi \mapsto \phi(H))$ genügt es ein Element $\varphi \in \mathfrak{h}^{**}$ zu konstruieren, so dass $\varphi(\alpha) \neq 0$ für alle $\alpha \in \Phi$ und $\varphi(\alpha) \neq \varphi(\beta)$ für alle $\alpha, \beta \in \Phi$ mit $\alpha \neq \beta$.

Da $\mathfrak{h}^* = \operatorname{span}_k \Phi$ gibt es eine k-Basis $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Phi$ von $\mathfrak{h}^*$. Der Körper k ist algebraisch abgeschlossen mit $\operatorname{char} k = 0$, also unendlichdimensional über $\mathbb{Q}$. Deshalb gibt es $z_1, \ldots, z_n \in k$, die linear unabhängig über $\mathbb{Q}$ sind. Es sei $\varphi\colon \mathfrak{h}^* \to k$ die k-lineare Abbildung mit $\varphi(\alpha_i) = z_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Per Konstruktion ist φ auf $\operatorname{span}_{\mathbb{Q}}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ injektiv. Da $0 \notin \Phi$ und $\Phi \subseteq \operatorname{span}_{\mathbb{Q}}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ erfüllt φ die gewünschten Bedingungen. $\square$

Um zu zeigen, dass $\operatorname{rad} \mathfrak{g}^X \subseteq Z(\mathfrak{g}^X)$, zeigen wir zunächst, dass $\operatorname{rad} \mathfrak{g}^X \subseteq \mathfrak{h}$: Andernfalls gebe es $Y \in \operatorname{rad} \mathfrak{g}^X$ mit $Y = Y_0 + \sum_{\alpha \in \Phi_X} Y_\alpha$ bezüglich (4) und $\Psi \neq \emptyset$ für

$$\Psi := \{\alpha \in \Phi_X \mid Y_\alpha \neq 0\}.$$

Für alle $H \in \mathfrak{h}$ und $p \geq 1$ ist dann auch

$$(\operatorname{ad} H)^p(Y) = \sum_{\alpha \in \Psi} \alpha(H)^p Y_\alpha \in \operatorname{rad} \mathfrak{g}^X,$$

da $\operatorname{rad} \mathfrak{g}^X$ ein Ideal in $\mathfrak{g}^X$ ist. Es sei $H \in \mathfrak{h}$ wie in Behauptung 2 und $\Psi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ mit $\alpha_i \neq \alpha_j$ für $i \neq j$. Für $p = 1, \ldots, n$ sei

$$Z_p := (\operatorname{ad} H)^p(Y) = \sum_{\alpha \in \Psi} \alpha(H)^p Y_\alpha \in \operatorname{rad} \mathfrak{g}^X.$$

Da die Wurzelräume $\mathfrak{g}_\alpha$ für alle $\alpha \in \Phi$ eindimensional sind, ist $(Y_{\alpha_1}, \ldots, Y_{\alpha_n})$ eine Basis von $\bigoplus_{\alpha \in \Psi} \mathfrak{g}_\alpha$. Damit ist auch $(Z_1, \ldots, Z_n)$ eine Basis von $\bigoplus_{\alpha \in \Psi} \mathfrak{g}_\alpha$, da

$$\begin{aligned} &\det \begin{pmatrix} \alpha_1(h) & \alpha_1(h)^2 & \cdots & \alpha_1(h)^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n(h) & \alpha_n(h)^2 & \cdots & \alpha_n(h)^n \end{pmatrix} \\ &= \alpha_1(h) \cdots \alpha_n(h) \det \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1(h) & \cdots & \alpha_1(h)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n(h) & \cdots & \alpha_n(h)^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \alpha_1(h) \cdots \alpha_n(h) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_j(h) - \alpha_i(h)) \neq 0. \end{aligned}$$

Da $Z_1, \ldots, Z_n \in \operatorname{rad} \mathfrak{g}^X$ ist damit $\bigoplus_{\alpha \in \Psi} \mathfrak{g}_\alpha \subseteq \operatorname{rad} \mathfrak{g}^X$, also $\mathfrak{g}_\alpha \subseteq \operatorname{rad} \mathfrak{g}^X$ für alle $\alpha \in \Psi$. Da nach Annahme $\Psi \neq \emptyset$ gibt deshalb insbesondere $\alpha \in \Psi$ mit $\mathfrak{g}_\alpha \subseteq \operatorname{rad} \mathfrak{g}^X$. Dies steht im Widerspruch zu Behauptung 1, und zeigt, dass $\operatorname{rad} \mathfrak{g}^X \subseteq \mathfrak{h}$ gilt.

Ist $Y \in \operatorname{rad} \mathfrak{g}^X \subseteq \mathfrak{h}$ mit $Y \notin Z(\mathfrak{g}^X)$, so gibt es nach (6) ein $\alpha \in \Phi_X$ mit $\alpha(Y) \neq 0$. Dann ist

$$\mathfrak{g}_\alpha = [Y, \mathfrak{g}_\alpha] \subseteq \operatorname{rad} \mathfrak{g}^X,$$

da $\operatorname{rad} \mathfrak{g}^X$ ein Ideal in $\mathfrak{g}^X$ ist. Dies steht im Widerspruch zu Behauptung 1 und zeigt deshalb, dass $\operatorname{rad} \mathfrak{g}^X \subseteq Z(\mathfrak{g}^X)$ gilt. $\square$

Korollar 2.15. *Es sei $\mathfrak{g}$ eine reduktive Lie-Algebra und $X \in \mathfrak{g}$ halbeinfach. Dann ist auch der Zentralisator $\mathfrak{g}^X$ reduktiv.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{s} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ und $X = X_1 + X_2$ bezüglich $\mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{s}$. Nach Lemma 1.41 ist X_2 ein halbeinfaches Element der halbeinfachen Lie-Algebra $\mathfrak{s}$. Damit ist $\mathfrak{s}^{X_2}$ nach Proposition 2.14 reduktiv und somit auch

$$\mathfrak{g}^X = Z(\mathfrak{g})^{X_1} \oplus \mathfrak{s}^{X_2} = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{s}^{X_2},$$

da $Z(\mathfrak{g})$ abelsch ist. □

Wie bereits im Fall von $\mathfrak{gl}_n(k)$ wollen wir uns zur Klassifikation der halbeinfachen Orbiten $\mathcal{S}(\mathfrak{g}, G)$ auf die Wirkung von G auf eine CSA von $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ einschränken können, indem wir $N_G(\mathfrak{h})$ betrachten. Die Rechtfertigung hierfür liefern uns die folgenden Aussagen.

Lemma 2.16. *Es seien $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2 \subseteq \mathfrak{g}$ zwei CSA. Dann gibt es $s \in G$ mit $s \cdot \mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}_2$.*

Beweis. Nach Korollar 1.61 gibt es $\sigma \in \operatorname{Int} \mathfrak{g}$ mit $\sigma(\mathfrak{h}_1) = \mathfrak{h}_2$ und nach Annahme gibt es $s \in G$, das durch σ auf $\mathfrak{g}$ wirkt, für das also $s \cdot \mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}_2$. □

Korollar 2.17. *Es sei $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine CSA und $\mathcal{O} \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}, G)$ ein halbeinfacher Orbit. Dann gibt es $X \in \mathfrak{h}$ mit $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}$.*

Beweis. Es sei $X' \in \mathcal{O}$. Dann ist X' halbeinfach und in einer CSA $\mathfrak{h}' \subseteq \mathfrak{g}$ enthalten. Nach Lemma 2.16 gibt es $s \in G$ mit $s \cdot \mathfrak{h}' = \mathfrak{h}$. Damit ist $s \cdot X' \in \mathfrak{h}$ ein Element mit $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{X'} = \mathcal{O}_{s \cdot X'}$. □

Definition 2.18. Ist $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine CSA, so sei

$$W(\mathfrak{h}, G) := N_G(\mathfrak{h}) / Z_G(\mathfrak{h}).$$

Theorem 2.19. *Ist $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine CSA, so ist die Abbildung*

$$\begin{aligned} \Phi \colon \mathfrak{h}/W(\mathfrak{g}, G) &\longrightarrow \mathcal{S}(\mathfrak{g}, G), \\ [X] &\longmapsto \mathcal{O}_X \end{aligned}$$

eine wohldefinierte Bijektion.

Beweis. Es genügt die Aussage für $N_G(\mathfrak{h})$ statt für W zu zeigen, da eine Gleichheit von Orbiten $\mathfrak{h}/W(\mathfrak{g}, G) = \mathfrak{h}/N_G(\mathfrak{h})$ gilt.

Da $\mathfrak{h}$ aus halbeinfachen Elementen besteht, und $\mathcal{O}_{s \cdot X} = \mathcal{O}_X$ für alle $X \in \mathfrak{g}$ und $s \in G$, ist Φ wohldefiniert. Nach Korollar 2.17 ist Φ surjektiv.

Es seien $X_1, X_2 \in \mathfrak{h}$ mit $\mathcal{O}_{X_1} = \mathcal{O}_{X_2}$. Für die Injektivität von Φ gilt es zu zeigen, dass X_1 und X_2 bereits unter $N_G(\mathfrak{h})$ konjugiert zueinander sind. Da $X_1 \in \mathcal{O}_{X_1} = \mathcal{O}_{X_2}$ gibt es $t \in G$ mit $t \cdot X_2 = X_1$. Dann G durch Lie-Algebra-Automorphismen auf $\mathfrak{g}$ wirkt, sind $\mathfrak{h}$ und $t \cdot \mathfrak{h}$ zwei CSA von $\mathfrak{g}$, die X_1 enthalten. Da CSA abelsch sind, ist bereits $\mathfrak{h}, t \cdot \mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}^{X_1}$. Nach Proposition 2.14 ist $\mathfrak{g}^{X_1}$ reduktiv, und nach Korollar 1.52 sind $\mathfrak{h}$ und $s \cdot \mathfrak{h}$ zwei CSA von $\mathfrak{g}^{X_1}$.

Nach Korollar 1.61 gibt es $\sigma \in \operatorname{Int} \mathfrak{g}^{X_1}$ mit $\sigma(t \cdot \mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. Für jedes nilpotente Element $Y \in \mathfrak{g}^{X_1} = Z_{\mathfrak{g}}(X_1)$ ist $(\operatorname{ad}_{Z_{\mathfrak{g}}(X_1)} Y)(X_1) = 0$ und somit

$$\exp(\operatorname{ad}_{Z_{\mathfrak{g}}(X_1)} Y)(X_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\operatorname{ad}_{Z_{\mathfrak{g}}(X_1)} Y)^n}{n!}(X_1) = X_1.$$

Da $\operatorname{Int} \mathfrak{g}^{X_1}$ von Elementen der Form $\exp(\operatorname{ad}_{Z_{\mathfrak{g}}(X_1)} Y)$ für nilpotente $Y \in \mathfrak{g}^{X_1}$ erzeugt wird, folgt daraus, dass X_1 von jedem inneren Automorphismus aus $\operatorname{Int} \mathfrak{g}^{X_1}$ stabilisiert wird. Insbesondere also von σ, weshalb $\sigma(X_1) = X_1$.

Nach Lemma 1.62 lässt sich σ zu einem inneren Automorphismus $\hat{\sigma} \in \operatorname{Int} \mathfrak{g}$ fortsetzen, und nach Annahme gibt es $s \in G$, das durch $\hat{\sigma}$ auf $\mathfrak{g}$ wirkt. Zum einen ist deshalb

$$s \cdot t \cdot X_2 = s \cdot X_1 = \hat{\sigma}(X_1) = \sigma(X_1) = X_1,$$

und zum anderen ist

$$s \cdot t \cdot \mathfrak{h} = \hat{\sigma}(t \cdot \mathfrak{h}) = \sigma(t \cdot \mathfrak{h}) = \mathfrak{h}.$$

Also sind X_2 und X_1 durch $s \cdot t \in N_G(\mathfrak{h})$ konjugiert zueinander. □

Bemerkung 2.20. 1. Statt dem Normalisator $N_G(\mathfrak{h})$ selbst betrachten wir die Gruppe $W(\mathfrak{h}, G)$, da diese im weiteren Vorgehen eine schönere Form hat als der Normalisator.

2. Unter passenden Gruppenwirkungen, wie etwa in [CM93, §2], stellt sich zudem heraus, dass $W(\mathfrak{h}, G)$ isomorph zur Weyl-Gruppe von $\mathfrak{g}$ bezüglich $\mathfrak{h}$ ist.

3 Halbeinfache Orbiten in $\mathfrak{so}_n(k)$ und $\mathfrak{sp}_{2n}(k)$

Als eine direkte Anwendung der in Kapitel 2 entwickelten Theorie bestimmen wir in diesem Kapitel die halbeinfachen Orbiten in $\mathfrak{so}_n(k)$ unter den Konjugationswirkung von $\mathrm{O}_n(k)$ und $\mathrm{SO}_n(k)$, sowie die halbeinfachen Orbiten in $\mathfrak{sp}_{2n}(k)$ unter der Konjugationswirkung von $\mathrm{Sp}_{2n}(k)$

Dabei meinen wir im Folgenden mit der Wirkung von $\mathrm{O}_n(k)$ und $\mathrm{SO}_n(k)$ auf $\mathfrak{so}_n(k)$, sowie der Wirkung von $\mathrm{Sp}_{2n}(k)$ auf $\mathfrak{sp}_{2n}(k)$ stets die entsprechende Konjugationswirkung. Wir nutzen im Folgenden die Definitionen und Notationen aus Abschnitt 1.1.2, und raten dem Leser, sich mit diesen gegebenenfalls noch einmal vertraut zu machen.

Wie wir bereits in Beispiel 1.6 gesehen haben, ist die Lie-Algebra $\mathfrak{so}_n$ für $n = 2$ eindimensional und abelsch, und für $n \neq 2$ halbeinfach, also stets reduktiv. Die Lie-Algebra $\mathfrak{sp}_{2n}$ ist für alle $n \geq 1$ halbeinfach und damit ebenfalls reduktiv. In den Beispielen 2.12 und 2.13 haben wir außerdem gesehen, dass jeder innere Automorphismus von $\mathfrak{so}_n(k)$ nicht nur durch Konjugation mit einem Element aus $\mathrm{O}_n(k)$ gegeben ist, sondern bereits mit einem Element aus $\mathrm{SO}_n(k)$. Außerdem ist jeder innere Automorphismus von $\mathfrak{sp}_{2n}(k)$ durch Konjugation mit einem Element aus $\mathrm{Sp}_{2n}(k)$ gegeben. Es sind daher alle Bedingungen erfüllt, um die halbeinfachen Orbiten in $\mathfrak{so}_n(k)$ unter den Wirkungen von $\mathrm{O}_n(k)$ und $\mathrm{SO}_n(k)$, sowie die halbeinfachen Orbiten in $\mathfrak{sp}_{2n}(k)$ unter der Wirkung von $\mathrm{Sp}_{2n}(k)$, mithilfe der Klassifikation aus Theorem 2.19 zu bestimmen.

Um Theorem 2.19 auf $\mathfrak{so}_n(k)$ anwenden zu können, müssen wir zunächst eine CSA $\mathfrak{h}_n \subseteq \mathfrak{so}_n(k)$ wählen, und anschließend die Gruppen $W(\mathfrak{h}_n, \mathrm{O}_n(k))$ und $W(\mathfrak{h}_n, \mathrm{SO}_n(k))$ berechnen. Hierfür ist es begehrenswert, dass $\mathfrak{h}_n$ eine Form hat, mit der sich möglichst leicht arbeiten lässt. Unser Ziel ist es, den Schnitt $\mathfrak{d}_n(k) \cap \mathfrak{so}_n(k)$ als CSA wählen zu können, da wir bereits verschiedene Aussagen über die daraus entstehenden Zentralisatoren und Normalisatoren kennen, etwa Korollar 2.3 und Lemma 2.9. Da aber $\mathfrak{so}_n(k) \subseteq \mathfrak{gl}_n(k)$ genau die Unteralgebra der schiefsymmetrischen Matrizen ist, führt dies für kein $n \geq 2$ zum Erfolg.

Um dieses Dilemma zu umgehen, wollen wir statt mit $\mathfrak{so}_n(k)$ selbst mit einer isomorphen Lie-Algebra $\mathfrak{g}_n$ arbeiten, so dass $\mathfrak{g}_n$ nicht nur eine möglichst schöne Form hat, sondern auch $\mathfrak{d}_n \cap \mathfrak{g}_n$ eine CSA in $\mathfrak{g}_n$ ist. Um eine solche Lie-Algebra $\mathfrak{g}_n$ zu konstruieren, nutzen wir aus, dass $\mathfrak{so}_n(k) = \mathfrak{o}(I_n)$ über die darstellende Matrix I_n einer Bilinearform definiert ist. Ist dann $B \in \mathrm{M}_n(k)$ eine Matrix, die die gleiche Bilinearform bezüglich einer anderen Basis beschreibt, so sind $\mathfrak{so}_n(k)$ und $\mathfrak{o}(B)$ isomorphe Lie-Algebren.

Dieses Vorgehen ist ein geläufiger Trick, um eine äquivalente Definition von $\mathfrak{so}_n(k)$ zu erhalten, die für die jeweiligen Zwecke besser geeignet ist. In [Hum72, §1] etwa werden $\mathfrak{so}_{2n}(k)$ und $\mathfrak{so}_{2n+1}(k)$ nicht über die Einheitsmatrizen I_{2n} und I_{2n+1} definiert, sondern über die Matrizen

$$\begin{pmatrix} & I_n \\ I_n & \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & & \\ & & I_n \\ & I_n & \end{pmatrix}.$$

Auch $\mathfrak{sp}_{2n}(k)$ wollen wir durch eine isomorphe Lie-Algebra ersetzen, wenn auch aus anderen Gründen: Aus Beispiel 1.6 bekannt, dass

$$\mathfrak{sp}_{2n}(k) = \left\{ \begin{pmatrix} P & Q \\ R & -P^\top \end{pmatrix} \middle| P, Q, R \in \mathrm{M}_n(k), Q^\top = Q, R^\top = R \right\},$$

$\mathfrak{sp}_{2n}(k)$ enthält also für alle $n \geq 1$ eine reguläre Diagonalmatrix. Nach Korollar 2.4 ist daher $\mathfrak{h}_{2n} := \mathfrak{d}_{2n}(k) \cap \mathfrak{sp}_{2n}(k)$ eine CSA in $\mathfrak{sp}_{2n}(k)$ für alle $n \geq 1$. Es ist daher naheliegend, mit $\mathfrak{sp}_{2n}(k)$ selbst und der CSA $\mathfrak{h}_{2n}$ zu arbeiten. Tatsächlich liefern uns die Berechnungen, die wir im Folgenden durchführen, durch das Vertauschen und Modifizieren einiger Indizes die hierfür nötigen Rechnungen. Gerade deshalb werden wir aber auch $\mathfrak{sp}_{2n}(k)$ durch eine leicht abgeänderte, isomorphe Lie-Algebra ersetzen, da wir so alle essenziellen Rechnungen und Konstruktion nur einmal durchführen müssen, und uns für die konkreten Orbiten auf die jeweils entscheidenden Details konstruieren können.

Um die entsprechenden isomorphen Lie-Algebren zu konstruieren nutzen wir jeweils, dass $\mathfrak{so}_n(k)$ und $\mathfrak{sp}_{2n}(k)$ über die darstellenden Matrizen von Bilinearformen definiert sind. Hierfür betrachten wir zunächst, wie sich die halbeinfachen Orbiten unter den entsprechenden Isomorphismen verhalten, und geben diese dann für $\mathfrak{so}_n(k)$ und $\mathfrak{sp}_{2n}(k)$ explizit an. Im mittleren Teil des Kapitels untersuchen wir die halbeinfachen Orbiten in den isomorphen Lie-Algebren, um am Ende schließlich die halbeinfachen Orbiten in $\mathfrak{so}_n(k)$ und $\mathfrak{sp}_{2n}(k)$ selbst zu erhalten.

3.1 Gemeinsames Vorgehen

3.1.1 Halbeinfache Orbiten unter verträglichen Isomorphismen

Definition 3.1. Es seien G_1 und G_2 zwei Gruppen, X_1 eine G_1-Menge und X_2 eine G_2-Menge. Eine Abbildung $F\colon X_1 \to X_2$ und ein Gruppenhomomorphismus $f\colon G_1 \to G_2$ heißen *verträglich*, falls

$$f(g) \cdot F(x) = F(g \cdot x) \quad \text{für alle } g \in G_1 \text{ und } x \in X_1.$$

Lemma 3.2. *Für $i = 1, 2$ sei G_i eine Gruppe, die durch Lie-Algebra-Automorphismen auf einer reduktiven Lie-Algebra $\mathfrak{g}_i$ wirkt. Es sei $\Phi\colon \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ ein Isomorphismus von Lie-Algebren und $\phi\colon G_1 \to G_2$ ein verträglicher Isomorphismus von Gruppen. Dann induziert Φ eine Bijektion zwischen den halbeinfachen Orbiten*

$$\mathcal{S}(\mathfrak{g}_1, G_1) \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}(\mathfrak{g}_2, G_2), \quad \mathcal{O}_X \mapsto \mathcal{O}_{\Phi(X)}.$$

Beweis. Da Φ und ϕ verträglich sind, induziert Φ eine Bijektion von Orbiten

$$\{G_1 \cdot X \mid X \in \mathfrak{g}_1\} \xrightarrow{\sim} \{G_2 \cdot X \mid X \in \mathfrak{g}_2\},$$
$$\mathcal{O}_X \longmapsto \mathcal{O}_{\Phi(X)}.$$

Ein Element $X \in \mathfrak{g}_1$ ist genau dann halbeinfach, wenn $\Phi(X)$ halbeinfach ist, da Φ ein Isomorphismus von Lie-Algebren ist. Da ein Orbit genau dann halbeinfach ist, wenn er aus halbeinfachen Elementen besteht, schränkt sich die obige Bijektion von Orbiten auf eine Bijektion von halbeinfachen Orbiten ein. □

Beispiel 3.3. Es sei $B \in \mathrm{M}_n(k)$, so dass $\mathfrak{o}(B)$ reduktiv ist, und $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ seien zwei geordnete Basen von k^n. Bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ stellt B eine Bilinearform auf k^n dar, und diese wird bezüglich der Basis $\mathcal{C}$ von einer Matrix $C \in \mathrm{M}_n(k)$ dargestellt. Mit der Basiswechselmatrix $\Gamma \in \mathrm{M}_n(k)$ von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{C}$ ergibt sich ein Isomorphismus von Lie-Algebren

$$\Phi\colon \mathfrak{o}(B) \to \mathfrak{o}(C), \quad A \mapsto \Gamma A \Gamma^{-1}$$

und einen Isomorphismus von Gruppen

$$\phi\colon \mathrm{O}(B) \to \mathrm{O}(C), \quad S \mapsto \Gamma S \Gamma^{-1}.$$

Es seien $H_B \subseteq \mathrm{O}(B)$ und $H_C \subseteq \mathrm{O}(C)$ Untergruppen mit $\phi(H_B) = H_C$.

Da Φ und ϕ durch Konjugation mit Γ gegeben sind, sind sie bezüglich der Konjugationswirkung von H_B auf $\mathfrak{o}(B)$ und H_C auf $\mathfrak{o}(C)$ verträglich. Da es sich zusätzlich um Isomorphismen handelt, induziert Φ eine Bijektion von halbeinfachen Orbiten

$$\mathcal{S}(\mathfrak{o}(B), H_B) \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}(\mathfrak{o}(C), H_C),$$
$$Or_X \longmapsto \mathcal{O}_{\Phi(X)}.$$

Bemerkung 3.4. Ist in dem obigen Beispiel jeder innere Automorphismus von $\mathfrak{o}(B)$, bzw. $\mathfrak{o}(C)$, durch Konjugation mit einem Element aus H_B, bzw. H_C, gegeben, so lässt sich Theorem 2.19 zur Berechnung von $\mathcal{S}(\mathfrak{o}(B), H_B)$ und $\mathcal{S}(\mathfrak{o}(C), H_C)$ nutzen. (Nach Korollar 1.57 gilt dies etwa für $\mathrm{O}(B)$ und $\mathrm{O}(C)$.) In diesem Fall lässt sich die obige Bijektion auch wie folgt durch Theorem 2.19 erklären:

Ist $\mathfrak{h}_B \subseteq \mathfrak{o}(B)$ eine CSA, so ist $\mathfrak{h}_C \coloneqq \Phi(\mathfrak{h})$ eine CSA von $\mathfrak{o}(C)$, und Φ schränkt sich zu einem Isomorphismus $\Phi'\colon \mathfrak{h}_B \to \mathfrak{h}_C$ ein. Wegen der Verträglichkeit von Φ und ϕ ist außerdem $\phi(N_{H_B}(\mathfrak{h}_B)) = N_{H_C}(\mathfrak{h}_C)$ und $\phi(Z_{H_B}(\mathfrak{h}_B)) = Z_{H_C}(\mathfrak{h}_C)$. Für die Gruppen $W_B \coloneqq W(\mathfrak{h}_B, H_B)$ und $W_C \coloneqq W(\mathfrak{h}_C, H_C)$ induziert deshalb ϕ einen Isomorphismus von Gruppen $\phi'\colon W_B \to W_C$, der mit Φ, und damit auch mit Φ', verträglich ist. Da Φ' und ϕ' verträglich sind, induziert Φ' eine Bijektion $\mathfrak{h}_B/W_B \to \mathfrak{h}_C/W_C$. Insgesamt ergibt sich damit das kommutative Diagramm von Bijektionen in Abbildung 3.1 (Seite 38).

3.1.2 Isomorphe Beschreibungen von $\mathfrak{so}_n(k)$ und $\mathfrak{sp}_{2n}(k)$

Isomorphe Beschreibung von $\mathfrak{so}_n(k)$

Es ist $\mathfrak{so}_n(k) = \mathfrak{o}(I_n)$ und $\mathrm{O}_n(k) = \mathrm{O}(I_n)$ für die Einheitsmatrix $I_n \in \mathrm{M}_n(k)$. Bezüglich der Standardbasis $(e_1, \ldots, e_n)$ von k^n beschreibt I_n die Standardbilinearform

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S}(\mathfrak{o}(B), H_B) \arrow[r, "\mathcal{O}_X \mapsto \mathcal{O}_{\Phi(X)}"] & \mathcal{S}(\mathfrak{o}(C), H_C) \\
\mathfrak{h}_B/W_B \arrow[u, "{[X] \mapsto \mathcal{O}_X}"] \arrow[r, "{[X] \mapsto [\Phi(X)]}"'] & \mathfrak{h}_C/W_C \arrow[u, "{[X] \mapsto \mathcal{O}_X}"']
\end{tikzcd}$$

Abbildung 3.1: Die Korrespondenz der halbeinfachen Orbiten.

von k^n, und bezüglich einer passenden Basis $(e'_1, \dots, e'_n)$ wird diese durch der Matrix $J_n = \operatorname{adiag}(1, \dots, 1) \in \mathrm{M}_n(k)$ dargestellt. Ist $n = 2m$, so ist eine entsprechende Basis gegeben durch

$$e'_p := \frac{e_p + ie_{2m+1-p}}{\sqrt{2}}, \quad e'_{2m+1-p} := \frac{e_p - ie_{2m+1-p}}{\sqrt{2}} \qquad \text{für alle } p = 1, \dots, m,$$

und ist $n = 2m + 1$ so ist eine entsprechende Basis gegeben durch

$$e'_p := \frac{e_p + ie_{2m+2-p}}{\sqrt{2}}, \quad e'_{2m+2-p} := \frac{e_p - ie_{2m+2-p}}{\sqrt{2}} \qquad \text{für alle } p = 1, \dots, m, \text{ und}$$
$$e'_{m+1} := e_{m+1}.$$

Damit ergeben sich die folgenden Basiswechselmatrizen:

Definition 3.5. Für alle $n \geq 1$ sei

$$\Gamma_{2n} := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & & & & & 1 \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & 1 & 1 & & \\ & & i & -i & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ i & & & & & -i \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2n}(k),$$

und für alle $n \geq 0$ sei

$$\Gamma_{2n+1} := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & 1 \\ & \ddots & & & & \iddots & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & & & \sqrt{2} & & & \\ & & i & & -i & & \\ & \iddots & & & & \ddots & \\ i & & & & & & -i \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2n+1}(k).$$

Wie bereits in Abschnitt 1.1.2 dargelegt, ergeben sich aus Φ_n gewisse Isomorphismen.

Lemma 3.6. *Für alle $n \geq 1$ ist*

$$\Phi_n : \mathfrak{o}(J_n) \to \mathfrak{so}_n(k), \quad A \mapsto \Gamma_n A \Gamma_n^{-1},$$

ein Isomorphismus von Lie-Algebren und

$$\phi_n : \mathrm{O}(J_n) \to \mathrm{O}_n(k), \quad S \mapsto \Gamma_n S \Gamma_n^{-1}.$$

ein Isomorphismus von Gruppen.

Da Φ_n und ϕ_n durch Konjugation mit Γ_n gegeben sind, sind sie verträglich. Außerdem erhält ϕ_n die Determinate, weshalb $\phi_n(\mathrm{SO}(J_n)) = \mathrm{SO}_n(k)$. Wie bereits in Beispiel 3.3 gesehen induziert Φ_n deshalb Bijektionen von halbeinfachen Orbiten.

Lemma 3.7. *Der Isomorphismus Φ_n aus Lemma 3.6 induziert eine Bijektion*

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\mathfrak{o}(J_n), \mathrm{O}(J_n)) &\xrightarrow{\sim} \mathcal{S}(\mathfrak{so}_n(k), \mathrm{O}_n(k)), \\ \mathcal{O}_X &\longmapsto \mathcal{O}_{\Phi_n(X)}, \end{aligned}$$

und eine Bijektion

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\mathfrak{o}(J_n), \mathrm{SO}(J_n)) &\xrightarrow{\sim} \mathcal{S}(\mathfrak{so}_n(k), \mathrm{SO}_n(k)), \\ \mathcal{O}_X &\longmapsto \mathcal{O}_{\Phi_n(X)}. \end{aligned}$$

Wir wollen noch eine nützliche Beschreibung von $\mathfrak{o}(J_n)$ und $\mathrm{O}(J_n)$ angeben, die der Beschreibung von $\mathfrak{so}_n(k)$ und $\mathrm{O}_n(k)$ durch die Matrixtransposition entspricht.

Definition 3.8. Es sei $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathrm{M}_n(k)$. Die *Anti-Transponierte* von A ist

$$A^{\textcircled{\scriptsize T}} := (a_{n+1-j,n+1-i})_{1 \leq i,j \leq n}.$$

$A^{\textcircled{\scriptsize T}}$ ist die Transponierte von A an der Anti-Diagonalen, d.h.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}^{\textcircled{\scriptsize T}} = \begin{pmatrix} a_{nn} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Lemma 3.9. *Für alle $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathrm{M}_n(k)$ ist*

$$A^{\textcircled{\scriptsize T}} = J_n A^\top J_n.$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} J_n A^\top J_n &= J_n (a_{ij})_{ij}^\top J_n = J_n (a_{ji})_{ij} J_n \\ &= J_n (a_{j,n+1-i})_{ij} = (a_{n+1-j,n+1-i})_{ij} = A^{\textcircled{\scriptsize T}}. \end{aligned}$$ □

Korollar 3.10. *1. Für $A, B \in \mathrm{M}_n(k)$ ist $(AB)^{\varobar} = B^{\varobar} A^{\varobar}$.*

2. Für alle $A \in \mathrm{M}_n(k)$ ist $(A^{\varobar})^{\varobar} = A$.

3. Für $U \in \{\mathfrak{d}_n(k), \mathrm{D}_n(k), \mathrm{P}_n(k), \mathrm{Mon}_n(k)\}$ ist für beliebiges $X \in \mathrm{M}_n(k)$ genau dann $X \in U$, wenn $X^{\varobar} \in U$.

Korollar 3.11. *Für alle $n \geq 1$ ist*

$$\mathfrak{o}(J_n) = \{A \in \mathfrak{gl}_n(k) \mid A^{\varobar} = -A\} \quad \textit{und}$$
$$\mathrm{O}(J_n) = \{S \in \mathrm{GL}_n(k) \mid S^{\varobar} = S^{-1}\}.$$

Beweis. Es handelt sich jeweils um eine Umformulierung der Definition mithilfe von $J_n = J_n^{-1}$ und Lemma 3.9. □

Wir halten noch die folgende Beobachtung fest:

Lemma 3.12. *Ist $M \in \mathrm{Mon}_n(k)$ mit $M \in \mathrm{O}(J_n)$ und Zerlegung $M = DP$ bezüglich $\mathrm{Mon}_n(k) = \mathrm{D}_n(k) \rtimes \mathrm{P}_n(k)$, so gilt bereits $D, P \in \mathrm{O}(J_n)$.*

Beweis. Da $M \in \mathrm{O}(J_n)$ ist $I = MM^{\varobar} = DPP^{\varobar}D^{\varobar}$ und damit $PP^{\varobar} = (D^{\varobar}D)^{-1}$. Da $PP^{\varobar}$ eine Permutationsmatrix und $(D^{\varobar}D)^{-1}$ eine Diagonalmatrix ist, folgt, dass bereits $PP^{\varobar} = I = DD^{\varobar}$, also $D, P \in \mathrm{O}(J_n)$. □

Isomorphe Beschreibung von $\mathfrak{sp}_{2n}(k)$

Definition 3.13. Für alle $n \geq 1$ sei

$$K_{2n} := \begin{pmatrix} & J_n \\ -J_n & \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2n}(k) \quad \text{und} \quad \Upsilon_{2n} := \begin{pmatrix} I_n & \\ & J_n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2n}(k).$$

Es ist $\mathfrak{sp}_{2n}(k) = \mathfrak{o}(\Omega)$ und $\mathrm{Sp}_{2n}(k) = O(\Omega)$ für

$$\Omega = \begin{pmatrix} & I_n \\ -I_n & \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2n}(k).$$

Bezüglich der Standardbasis $(e_1, \ldots, e_{2n})$ von k^{2n} stellt Ω eine Bilinearform auf k^{2n} dar, die bezüglich der Basis $(e'_1, \ldots, e'_{2n})$ mit

$$e'_p := e_p,\ e'_{n+p} := e_{2n+1-p} \quad \text{für alle } p = 1, \ldots, n.$$

durch die Matrix K_{2n} dargestellt wird. Die entsprechende Basiswechselmatrix ist Υ_{2n}. Wie in Abschnitt 1.1.2 erläutert, ergeben sich die folgenden Isomorphismen:

Lemma 3.14. *Die Abbildung*

$$\Phi_{2n} \colon \mathfrak{o}(K_{2n}) \to \mathfrak{sp}_{2n}(k), \quad A \mapsto \Upsilon_{2n} A \Upsilon_{2n}^{-1},$$

ist ein Isomorphismus von Lie-Algebren, und die Abbildung

$$\phi_{2n} \colon \mathrm{O}(K_{2n}) \to \mathrm{Sp}_{2n}(k), \quad S \mapsto \Upsilon_{2n} S \Upsilon_{2n}^{-1}.$$

ein Isomorphismus von Gruppen.

Dabei ist

$$\begin{aligned}\mathfrak{o}(K_{2n}) &= \{A \in \mathfrak{gl}_{2n}(k) \mid A^\top K_{2n} = -K_{2n}A\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} P & Q \\ R & -P^{⦹} \end{pmatrix} \,\middle|\, P, Q, R \in \mathrm{M}_n(k) \text{ mit } Q^{⦹} = Q \text{ und } R^{⦹} = R \right\}.\end{aligned}$$

Da Φ_{2n} und ϕ_{2n} durch Konjugation mit Υ_{2n} gegeben sind, sind sie verträglich. Wie bereits in Beispiel 3.3 induziert Φ_{2n} deshalb eine Bijektion von halbeinfachen Orbiten.

Lemma 3.15. *Der Isomorphismus Φ_{2n} aus Lemma 3.14 induziert eine Bijektion*

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(\mathfrak{o}(K_{2n}), \mathrm{O}(K_{2n})) &\xrightarrow{\sim} \mathcal{S}(\mathfrak{sp}_{2n}(k), \mathrm{Sp}_{2n}(k)), \\ \mathcal{O}_X &\longmapsto \mathcal{O}_{\Phi(X)}.\end{aligned}$$

3.1.3 Cartan-Unteralgebren von $\mathfrak{o}(J_n)$ und $\mathfrak{o}(K_{2n})$

Definition 3.16. Für alle $n \geq 1$ sei

$$\mathfrak{h}_{2n} \coloneqq \{\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n, -a_n, \ldots, a_1) \mid a_1, \ldots, a_n \in k\}$$

und für alle $n \geq 0$ sei

$$\mathfrak{h}_{2n+1} \coloneqq \{\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n, 0, -a_n, \ldots, a_1) \mid a_1, \ldots, a_n \in k\}.$$

Lemma 3.17. *Für alle $n \geq 1$ ist $\mathfrak{h}_n$ eine CSA von $\mathfrak{o}(J_n)$ und $\mathfrak{h}_{2n}$ eine CSA von $\mathfrak{o}(K_{2n})$.*

Beweis. Aus den bereits getroffenen Beschreibungen der reduktiven Lie-Algebren $\mathfrak{o}(J_n)$ und $\mathfrak{o}(K_{2n})$ folgt, dass sie für alle $n \geq 1$ eine reguläre Diagonalmatrix enthalten. Nach Korollar 2.4 sind daher $\mathfrak{o}(J_n) \cap \mathfrak{d}_n(k)$ und $\mathfrak{o}(K_{2n}) \cap \mathfrak{d}_{2n}(k)$ jeweils CSA. Aus den bisherigen Beschreibungen von $\mathfrak{o}(J_n)$ und $\mathfrak{o}(K_{2n})$ folgt auch, dass für alle $n \geq 1$

$$\mathfrak{o}(J_n) \cap \mathfrak{d}_n(k) = \mathfrak{h}_n(k) \quad \text{und} \quad \mathfrak{o}(K_{2n}) \cap \mathfrak{d}_{2n}(k) = \mathfrak{h}_{2n}(k),$$

weshalb es sich jeweils um CSA handelt. □

Wir führen noch die folgende Notation ein: Für alle $n \geq 1$ und $a_1, \ldots, a_n \in k$ sei

$$H_{2n}(a_1, \ldots, a_n) \coloneqq \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n, -a_n, \ldots, -a_1) \in \mathfrak{h}_{2n}$$

und für alle $n \geq 0$ und $a_1, \ldots, a_n \in k$ sei

$$H_{2n+1}(a_1, \ldots, a_n) \coloneqq \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n, 0, -a_n, \ldots, -a_1) \in \mathfrak{h}_{2n+1}.$$

Sofern die Dimension klar ist, schreiben wir auch nur H statt H_{2n} oder H_{2n+1}.

Wir bemerken noch, dass $\mathfrak{h}_n$ für alle $n \geq 1$ eine reguläre Diagonalmatrix enthält, beispielsweise $H_{2n}(1, 2, \ldots, n)$ bzw. $H_{2n+1}(1, 2, \ldots, n)$.

3.2 Die Permutationsmatrizen $\mathcal{P}_n$

In diesem Abschnitt führen wir eine Untergruppe $\mathcal{P}_n$ der Permutationsmatrizen $\mathrm{P}_n(k)$ ein, die sich für die Berechnungen in den nächsten Abschnitten als entscheident erweist.

3.2.1 Definition und resultierende Klassifikation halbeinfacher Orbiten

Definition 3.18. Für alle $n \geq 1$ seien

$$\mathcal{P}_n := N_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h}_n) \cap \mathrm{P}_n(k) = N_{\mathrm{P}_n(k)}(\mathfrak{h}_n),$$

sowie

$$\mathcal{P}_n^+ := \{P \in \mathcal{P}_n \mid \det P = 1\} \quad \text{und} \quad \mathcal{P}_n^- := \{P \in \mathcal{P}_n \mid \det P = -1\}.$$

Die Lie-Algebra $\mathfrak{h}_n$ enthält für alle $n \geq 1$ eine reguläre Diagonalmatrix. Nach Korollar 2.3 ist daher $Z_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h}_n) \subseteq \mathrm{D}_n(k)$. Nach Lemma 2.9 gilt außerdem, dass $N_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h}_n) \subseteq \mathrm{Mon}_n(k)$. Da Diagonalmatrizen kommutieren, gilt dabei bereits

$$Z_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h}_n) = \mathrm{D}_n(k).$$

Dies erlaubt es, die Zerlegung $\mathrm{Mon}_n(k) = \mathrm{D}_n(k) \rtimes \mathrm{P}_n(k)$ auf $N_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h}_n)$ einzuschränken.

Lemma 3.19. *Es ist* $N_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h}_n) = \mathrm{D}_n(k) \rtimes \mathcal{P}_n$.

Beweis. Da $N_{\mathrm{GL}_n(k)} \subseteq \mathrm{Mon}_n(k) = \mathrm{D}_n(k) \rtimes \mathrm{P}_n(k)$ gilt, genügt es zu zeigen, dass für beliebiges $S \in N_{\mathrm{GL}_n(k)}$ mit $S = DP$ bezüglich $\mathrm{Mon}_n(k) = \mathrm{D}_n(k) \rtimes \mathrm{P}_n(k)$ auch $D, P \in N_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h}_n)$ ist. Da $D \in \mathrm{D}_n(k) = Z_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h}_n) \subseteq N_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h}_n)$ gilt, ist auch $P = D^{-1}S \in N_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h}_n)$. $\square$

Damit erhalten wir ein Verfahren zur Bestimmung von $W(\mathfrak{h}_n, G)$ für beliebige Untergruppen $G \subseteq \mathrm{GL}_n(k)$.

Definition 3.20. Ist $G \subseteq \mathrm{GL}_n(k)$ eine Untergruppe, so sei

$$\Lambda(G) := \{P \in \mathcal{P}_n \mid \text{es gibt } D \in \mathrm{D}_n(k) \text{ mit } DP \in G\}.$$

Proposition 3.21. *Es sei $G \subseteq \mathrm{GL}_n(k)$ eine Untergruppe. Dann ist $\Lambda(G)$ eine Untergruppe von $\mathcal{P}_n$, und die Projektion*

$$p\colon \mathrm{Mon}_n(k) = \mathrm{D}_n(k) \rtimes \mathrm{P}_n(k) \to \mathrm{P}_n(k), \quad DP \mapsto P$$

induziert einen wohldefinierten Isomorphismus von Gruppen

$$q\colon W(\mathfrak{h}_n, G) = N_G(\mathfrak{h}_n)/Z_G(\mathfrak{h}_n) \to \Lambda(G), \quad [DP] \mapsto P.$$

Beweis. Es ist $N_G(\mathfrak{h}_n) \subseteq N_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h}_n)$ und somit $N_G(\mathfrak{h}_n) \subseteq \mathrm{Mon}_n(k)$, und nach Lemma 3.19 gilt deshalb $p(N_G(\mathfrak{h}_n)) \subseteq p(N_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h}_n)) = \mathcal{P}_n$. Daher ist die Einschränkung $\tilde{q}\colon N_G(\mathfrak{h}_n) \to \mathcal{P}_n$ ein wohldefinierter Gruppenhomomorphismus.

Ist $M \in N_G(\mathfrak{h}_n) \subseteq G$ mit $M = DP$ bezüglich $\mathrm{Mon}_n(k) = \mathrm{D}_n(k) \rtimes \mathrm{P}_n(k)$, so ist $\tilde{q}(M) = P \in \Lambda(G)$. Deshalb gilt $\operatorname{im}\tilde{q} \subseteq \Lambda(G)$. Ist andererseits $P \in \Lambda(G)$, so gibt es $D \in \mathrm{D}_n(k)$ mit $DP \in G$. Da dann $P \in \mathcal{P}_n = N_{\mathrm{P}_n(k)}(\mathfrak{h}_n)$ wird $\mathfrak{h}_n$ von P normalisiert, und da die Konjugationswirkungen von P und DP auf $\mathfrak{gl}_n(k)$ übereinstimmen, wird $\mathfrak{h}_n$ damit auch von DP normalisiert. Deshalb ist $DP \in N_G(\mathfrak{h}_n)$ und somit $P \in \operatorname{im}\tilde{q}$. Also ist auch $\Lambda(G) \subseteq \operatorname{im}\tilde{q}$ und somit $\Lambda(G) = \operatorname{im}\tilde{q}$.

Da $\ker p = \mathrm{D}_n(k) = Z_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h}_n)$ ist

$$\begin{aligned}\ker\tilde{q} &= \ker p \cap N_G(\mathfrak{h}_n) = Z_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h}_n) \cap N_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h}_n) \cap G \\ &= Z_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h}_n) \cap G = Z_G(\mathfrak{h}_n).\end{aligned}$$

Somit faktorisiert $\tilde{q}$ über einen Isomorphismus

$$q\colon N_G(\mathfrak{h}_n)/Z_G(\mathfrak{h}_n) = N_G(\mathfrak{h}_n)/\ker\tilde{q} \xrightarrow{\sim} \operatorname{im}\tilde{q} = \Lambda(G). \qquad \square$$

Dies ermöglicht uns in den folgenden Abschnitten eine effiziente Berechnung der halbeinfachen Orbiten.

Korollar 3.22. *Die Abbildungen*

$$\begin{aligned}\mathfrak{h}_n/\Lambda(\mathrm{O}(J_n)) &\to \mathcal{S}(\mathfrak{o}(J_n), \mathrm{O}(J_n)), && [X] \mapsto \mathcal{O}_X, \\ \mathfrak{h}_n/\Lambda(\mathrm{SO}(J_n)) &\to \mathcal{S}(\mathfrak{o}(J_n), \mathrm{SO}(J_n)), && [X] \mapsto \mathcal{O}_X, \\ \mathfrak{h}_n/\Lambda(\mathrm{O}(K_{2n})) &\to \mathcal{S}(\mathfrak{o}(K_{2n}), \mathrm{O}(K_{2n})), && [X] \mapsto \mathcal{O}_X\end{aligned}$$

sind wohldefinierte Bijektionen, wobei $\Lambda(G)$ für $G \in \{\mathrm{O}(J_n), \mathrm{SO}(J_n), \mathrm{O}(K_{2n})\}$ jeweils durch Konjugation auf $\mathfrak{h}_n$ wirkt.

Beweis. Diese ist ein Umformulierung von Theorem 2.19 mithilfe von Proposition 3.21. $\square$

Zur späteren Bestimmung von $\Lambda(G)$ mit $G \in \{\mathrm{O}(J_n), \mathrm{SO}(J_n), \mathrm{O}(K_{2n})\}$ geben wir hier noch explizite Parametrisierungen von $\mathcal{P}_{2n}$ und $\mathcal{P}_{2n+1}$ an. Für alle $n \geq 1$ identifizieren wir hierfür $\mathrm{P}_n(k)$ mit der symmetrischen Gruppe S_n.

Definition 3.23. Für alle $n \geq 1$ sei $\vartheta_n\colon S_n \to \mathrm{P}_n(k), \pi \mapsto T_\pi$ der eindeutige Gruppenisomorphismus mit $T_\pi \cdot e_i = e_{\pi(i)}$ für alle $i = 1, \ldots, n$, bezüglich der Standardbasis $(e_1, \ldots, e_n)$ von k^n.

Unter ϑ_n entspricht die Konjugationswirkung von $\mathrm{P}_n(k)$ auf $\mathfrak{d}_n(k)$ der Permutationswirkung von S_n mit

$$\pi \cdot \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n) = \operatorname{diag}(a_{\pi^{-1}(1)}, \ldots, a_{\pi^{-1}(n)})$$

für alle $\pi \in S_n$ und $a_1, \ldots, a_n \in k$. Insbesondere ist daher

$$\vartheta_n(\mathcal{P}_n) = \vartheta_n(N_{\mathrm{P}_n(k)}(\mathfrak{h}_n)) = N_{S_n}(\mathfrak{h}_n).$$

Es genügt daher, $N_{S_n}(\mathfrak{h}_n)$ zu parametrisieren, um eine Parametrisierung für $\mathcal{P}_n$ zu erhalten.

3.2.2 Der gerade Fall $\mathcal{P}_{2n}$

Wir schreiben in diesem Abschnitt abkürzend $\mathfrak{h} := \mathfrak{h}_{2n}$. Wir zeigen, dass sich der Normalisator $N_{S_{2n}}(\mathfrak{h})$ aus zwei einfachen Arten von Permutationen zusammensetzt.

Definition 3.24. Für alle $\pi \in S_n$ sei $\tau_\pi \in S_{2n}$ mit

$$\begin{aligned} \tau_\pi(i) &:= \pi(i) \quad \text{und} \\ \tau_\pi(2n+1-i) &:= 2n+1-\pi(i) \end{aligned} \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n.$$

Für $\varepsilon := (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \mathbb{Z}_2^n = \{1, -1\}^n$ sei $\sigma_\varepsilon \in S_{2n}$ mit

$$\sigma_\varepsilon := \prod_{i=1}^n (i,\ 2n+1-i)^{\delta(\varepsilon_i, -1)}.$$

(σ_ε vertauscht also i und $2n+1-i$, falls $\varepsilon_i = -1$, und fixiert sie, falls $\varepsilon_i = 1$.) Ferner seien

$$\mathcal{N}_{\mathbb{Z}_2^n} := \{\sigma_\varepsilon \mid \varepsilon \in \mathbb{Z}_2^n\} \quad \text{und} \quad \mathcal{N}_{S_n} := \{\tau_\pi \mid \pi \in S_n\}$$

Proposition 3.25. *Es sei $n \in \mathbb{N}_{>1}$.*

1. *Die Abbildung $S_n \to S_{2n}, \pi \mapsto \tau_\pi$ ist ein injektiver Gruppenhomomorphismus.*
2. *Für $\pi \in S_n$ und $H(a_1, \dots, a_n) \in \mathfrak{h}$ ist*
$$\tau_\pi \cdot H(a_1, \dots, a_n) = H\left(a_{\pi^{-1}(1)}, \dots, a_{\pi^{-1}(n)}\right).$$
Insbesondere ist $\tau_\pi \in N_{S_{2n}}(\mathfrak{h})$.
3. *Die Abbildung $\mathbb{Z}_2^n \to S_{2n}, \varepsilon \mapsto \sigma_\varepsilon$ ist ein injektiver Gruppenhomomorphismus.*
4. *Für alle $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \mathbb{Z}_2^n$ und $H(a_1, \dots, a_n) \in \mathfrak{h}$ ist*
$$\sigma_\varepsilon \cdot H(a_1, \dots, a_n) = H(\varepsilon_1 a_1, \dots, \varepsilon_n a_n).$$
Insbesondere ist $\sigma_\varepsilon \in N_{S_{2n}}(\mathfrak{h})$.

Beweis. 1. Die Homomorphieeigenschaft ergibt sich durch direktes Nachrechnen. Sind $\pi, \pi' \in S_n$ mit $\tau_\pi = \tau_{\pi'}$ so ist $\pi(i) = \tau_\pi(i) = \tau_{\pi'}(i) = \pi'(i)$ für alle $i = 1, \dots, n$ und somit $\pi = \pi'$.

2. Es ist $H(a_1, \dots, a_n) = \operatorname{diag}(a_1, \dots, a_{2n})$, wobei $a_{2n+1-i} = -a_i$ für alle $i = 1, \dots, n$. Da $\tau_\pi^{-1} = \tau_{\pi^{-1}}$ ist somit

$$\begin{aligned} \tau_\pi \cdot H(a_1, \dots, a_n) &= \operatorname{diag}\left(a_{\tau_\pi^{-1}(1)}, \dots, a_{\tau_\pi^{-1}(2n)}\right) \\ &= \operatorname{diag}\left(a_{\tau_{\pi^{-1}}(1)}, \dots, a_{\tau_{\pi^{-1}}(n)}, a_{\tau_{\pi^{-1}}(2n+1-n)}, \dots, a_{\tau_{\pi^{-1}}(2n+1-1)}\right) \\ &= \operatorname{diag}\left(a_{\pi^{-1}(1)}, \dots, a_{\pi^{-1}(n)}, a_{2n+1-\pi^{-1}(n)}, \dots, a_{2n+1-\pi^{-1}(1)}\right) \\ &= \operatorname{diag}\left(a_{\pi^{-1}(1)}, \dots, a_{\pi^{-1}(n)}, -a_{\pi^{-1}(n)}, \dots, -a_{\pi^{-1}(1)}\right) \\ &= H\left(a_{\pi^{-1}(1)}, \dots, a_{\pi^{-1}(n)}\right). \end{aligned}$$

3. Die Abbildung $(\{1,-1\},\cdot) \to (\{0,1\},+), x \mapsto \delta(x,-1)$ ist ein Gruppenisomorphismus. Für $\varepsilon, \varepsilon' \in \mathbb{Z}_2^n$ mit $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ und $\varepsilon' = (\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_n)$ ist deshalb

$$\delta(\varepsilon_i, -1) + \delta(\varepsilon'_i, -1) = \delta(\varepsilon_i \varepsilon'_i, -1) \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n,$$

und somit

$$\begin{aligned} \sigma_\varepsilon \sigma_{\varepsilon'} &= \prod_{i=1}^{n} (i,\ 2n+1-i)^{\delta(\varepsilon_i,-1)} \cdot \prod_{i=1}^{n} (i,\ 2n+1-i)^{\delta(\varepsilon'_i,-1)} \\ &= \prod_{i=1}^{n} (i,\ 2n+1-i)^{\delta(\varepsilon_i,-1)+\delta(\varepsilon'_i,-1)} = \prod_{i=1}^{n} (i,\ 2n+1-i)^{\delta(\varepsilon_i\varepsilon'_i,-1)} = \sigma_{\varepsilon\cdot\varepsilon'}. \end{aligned}$$

Ist $\varepsilon \in \mathbb{Z}_2^n$ mit $\sigma_\varepsilon = 1$, so ist $\sigma_\varepsilon(i) = i$ für alle $i = 1, \dots, n$ und deshalb $\varepsilon_i = 1$ für alle $i = 1, \dots n$.

4. Es seien $b_1, \dots, b_{2n} \in k$ mit

$$\sigma_\varepsilon \cdot H(a_1, \dots, a_n) = \operatorname{diag}(b_1, \dots, b_{2n}) \in \mathfrak{d}_{2n}(k).$$

Es ist $H(a_1, \dots, a_n) = \operatorname{diag}(a_1, \dots, a_{2n})$ mit $a_{2n+1-i} = -a_i$ für alle $i = 1, \dots, n$, und es gilt $\sigma_\varepsilon^{-1} = \sigma_{\varepsilon^{-1}} = \sigma_\varepsilon$. Für alle $i = 1, \dots, n$ ist deshalb

$$\begin{aligned} b_i &= a_{\sigma_\varepsilon^{-1}(i)} = a_{\sigma_\varepsilon(i)} = a_i = \varepsilon_i a_i & &\text{falls } \varepsilon_i = 1, \\ b_i &= a_{\sigma_\varepsilon^{-1}(i)} = a_{\sigma_\varepsilon(i)} = a_{2n+1-i} = -a_i = \varepsilon_i a_i & &\text{falls } \varepsilon_i = -1. \quad \square \end{aligned}$$

Der Normalisator $N_{S_{2n}}(\mathfrak{h})$ setzt sich bereits vollständig aus den beiden Untergruppen $\mathcal{N}_{\mathbb{Z}_2^n}$ und $\mathcal{N}_{S_n}$ zusammen.

Proposition 3.26. *Es ist $N_{S_{2n}}(\mathfrak{h}) = \mathcal{N}_{\mathbb{Z}_2^n} \rtimes \mathcal{N}_{S_n}$. Im Einzelnen gilt:*

1. *Es ist $N_{S_{2n}}(\mathfrak{h}) = \mathcal{N}_{\mathbb{Z}_2^n} \mathcal{N}_{S_n}$, d.h. jedes $\omega \in N_{S_{2n}}(\mathfrak{h})$ ist von der Form $\omega = \sigma_\varepsilon \tau_\pi$ für passende $\varepsilon \in \mathbb{Z}_2^n$ und $\pi \in S_n$.*
2. *Es gilt $\mathcal{N}_{\mathbb{Z}_2^n} \cap \mathcal{N}_{S_n} = 1$.*
3. *$\mathcal{N}_{\mathbb{Z}_2^n}$ ist normal in $N_{S_{2n}}(\mathfrak{h})$.*

Beweis. Im Folgenden sei

$$X \coloneqq H(1, \dots, n) = \operatorname{diag}(1, \dots, n, -n, \dots, -1) \in \mathfrak{h}.$$

Da X regulär ist, wirkt S_{2n} treu auf dem Orbit $\mathcal{O} \coloneqq S_{2n} \cdot X$. Also wirkt auch $N_{S_{2n}}(\mathfrak{h})$ treu auf diesem.

1. Es seien $a_1, \dots, a_n \in k$ mit $\omega \cdot X = H(a_1, \dots, a_n)$ und $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \mathbb{Z}_2^n$ mit

$$\varepsilon_i \coloneqq \operatorname{sgn} a_i \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n.$$

Es ist

$$\{\mathrm{sgn}(a_i)a_i \mid i = 1, \ldots, n\} = \{1, \ldots, n\},$$

denn ansonsten gebe es $1 \leq i \neq j \leq n$ mit $\mathrm{sgn}(a_i)a_i = \mathrm{sgn}(a_j)a_j$. Dann wären a_i, a_j, $-a_i$ und $-a_j$ vier Diagonaleinträge von $\omega \cdot X$ mit gleichem Betrag. Dies steht im Widerspruch dazu, dass $\omega \cdot X$ aus X durch Permutation der Diagonaleinträge entsteht.

Es gibt also ein eindeutiges $\pi \in S_n$ mit

$$\mathrm{sgn}(a_i)a_i = \pi^{-1}(i) \quad \text{für alle } i = 1, \ldots, n,$$

und für dieses gilt

$$\begin{aligned} \tau_\pi \cdot X &= H(\pi^{-1}(1), \ldots, \pi^{-1}(n)) = H(\mathrm{sgn}(a_1)a_1, \ldots, \mathrm{sgn}(a_n)a_n) \\ &= \sigma_\varepsilon \cdot H(a_1, \ldots, a_n) = \sigma_\varepsilon \cdot \omega \cdot X. \end{aligned}$$

Da $N_{S_{2n}}(\mathfrak{h})$ treu auf $\mathcal{O}$ wirkt, ist deshalb $\tau_\pi = \sigma_\varepsilon\, \omega$ und somit $\omega = \sigma_\varepsilon \tau_\pi$.

2. Es sei $\omega \in \mathcal{N}_{\mathbb{Z}_2^n} \cap \mathcal{N}_{S_n}$. Da $\omega \in \mathcal{N}_{S_n}$ permutiert ω die positiven und negativen Diagonaleinträge von X jeweils untereinander. Insbesondere bleiben die Vorzeichen der Diagonaleinträge von X unter ω erhalten. Für $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \mathbb{Z}_2^n$ mit $\sigma_\varepsilon = \omega$ ist damit $\varepsilon_i = 1$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Also ist $\varepsilon = 1$ und somit $\omega = \sigma_\varepsilon = 1$.

3. Es seien $\pi \in S_n$ $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \mathbb{Z}_2^n$. Es sei $\varepsilon' := (\varepsilon_{\pi^{-1}(1)}, \ldots, \varepsilon_{\pi^{-1}(n)}) \in \mathbb{Z}_2^n$. Es gilt

$$\begin{aligned} &\tau_\pi \cdot \sigma_\varepsilon \cdot \tau_\pi^{-1} \cdot X = \tau_\pi \cdot \sigma_\varepsilon \cdot \tau_{\pi^{-1}} \cdot X \\ =&\, \tau_\pi \cdot \sigma_\varepsilon \cdot H(\pi(1), \ldots, \pi(n)) = \tau_\pi \cdot H(\varepsilon_1 \pi(1), \ldots, \varepsilon_n \pi(n)) \\ =&\, H(\varepsilon_{\pi^{-1}(1)}, \varepsilon_{\pi^{-1}(2)} \cdot 2, \ldots, \varepsilon_{\pi^{-1}(n)} \cdot n) = \sigma_{\varepsilon'} \cdot X. \end{aligned}$$

Da $N_{S_{2n}}(\mathfrak{h})$ treu auf $\mathcal{O}$ wirkt, ist damit bereits $\tau_\pi \cdot \sigma_\varepsilon \cdot \tau_\pi^{-1} = \sigma_{\varepsilon'} \in \mathbb{Z}_2^n$. □

Zusammengefasst gelten die Isomorphien von Gruppen

$$\mathcal{P}_{2n} \cong N_{S_{2n}}(\mathfrak{h}) = \mathcal{N}_{\mathbb{Z}_2^n} \rtimes \mathcal{N}_{S_n} \cong \mathbb{Z}_2^n \rtimes S_n$$

durch die bisher konstruierten Isomorphismen. Unter den konstruierten Isomorphismen entspricht die Konjugationswirkung von $\mathcal{P}_{2n}$ auf $\mathfrak{h}$ der Wirkung von $\mathbb{Z}_2^n$ auf $\mathfrak{h}$ mit

$$(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \cdot H(a_1, \ldots, a_n) = H(\varepsilon_1 a_1, \ldots, \varepsilon_n a_n)$$

für alle $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \mathbb{Z}_2^n$ und $H(a_1, \ldots, n) \in h$, zusammen mit der Wirkung von S_n auf $\mathfrak{h}$ mit

$$\pi \cdot H(a_1, \ldots, a_n) = H(a_{\pi^{-1}(1)}, \ldots, a_{\pi^{-1}(n)})$$

für alle $\pi \in S_n$ und $H(a_1, \ldots, a_n) \in h$.

Beispiel 3.27. 1. Die Gruppe $\mathcal{P}_2$ besteht aus den beiden Elementen

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}.$$

2. Die Gruppee $\mathcal{P}_4$ besteht aus den folgenden acht Elementen.

$$\underset{I_4 = \sigma_{(1,1)} = \tau_{\mathrm{id}}}{\begin{pmatrix} 1 &&& \\ & 1 && \\ && 1 & \\ &&& 1 \end{pmatrix}} \quad \underset{\sigma_{(-1,1)}}{\begin{pmatrix} &&& 1 \\ & 1 && \\ && 1 & \\ 1 &&& \end{pmatrix}} \quad \underset{\sigma_{(1,-1)}}{\begin{pmatrix} 1 &&& \\ && 1 & \\ & 1 && \\ &&& 1 \end{pmatrix}} \quad \underset{\sigma_{(-1,-1)}}{\begin{pmatrix} &&& 1 \\ && 1 & \\ & 1 && \\ 1 &&& \end{pmatrix}}$$

$$\underset{\tau_{(1,\,2)}}{\begin{pmatrix} & 1 && \\ 1 &&& \\ &&& 1 \\ && 1 & \end{pmatrix}} \quad \underset{\sigma_{(-1,1)}\tau_{(1,\,2)}}{\begin{pmatrix} && 1 & \\ 1 &&& \\ &&& 1 \\ & 1 && \end{pmatrix}} \quad \underset{\sigma_{(1,-1)}\tau_{(1,\,2)}}{\begin{pmatrix} & 1 && \\ &&& 1 \\ 1 &&& \\ && 1 & \end{pmatrix}} \quad \underset{\sigma_{(-1,-1)}\tau_{(1,\,2)}}{\begin{pmatrix} && 1 & \\ &&& 1 \\ 1 &&& \\ & 1 && \end{pmatrix}}$$

3. Die Gruppe $\mathcal{P}_6$ hat $2^3 \cdot 3! = 48$ Elemente und wird als solche von den folgenden fünf erzeugt.

$$\underset{\sigma_{(-1,1,1)}}{\begin{pmatrix} &&&&& 1 \\ & 1 &&&& \\ && 1 &&& \\ &&& 1 && \\ &&&& 1 & \\ 1 &&&&& \end{pmatrix}} \quad \underset{\sigma_{(1,-1,1)}}{\begin{pmatrix} 1 &&&&& \\ &&&& 1 & \\ && 1 &&& \\ &&& 1 && \\ & 1 &&&& \\ &&&&& 1 \end{pmatrix}} \quad \underset{\sigma_{(1,1,-1)}}{\begin{pmatrix} 1 &&&&& \\ & 1 &&&& \\ &&& 1 && \\ && 1 &&& \\ &&&& 1 & \\ &&&&& 1 \end{pmatrix}} \quad \underset{\tau_{(1,\,2)}}{\begin{pmatrix} & 1 &&&& \\ 1 &&&&& \\ && 1 &&& \\ &&& 1 && \\ &&&&& 1 \\ &&&& 1 & \end{pmatrix}} \quad \underset{\tau_{(2,\,3)}}{\begin{pmatrix} 1 &&&&& \\ && 1 &&& \\ & 1 &&&& \\ &&&& 1 & \\ &&& 1 && \\ &&&&& 1 \end{pmatrix}}$$

Es gilt $\mathrm{P}_n(k) \subseteq \mathrm{O}_n(k)$, also $P^\top = P^{-1}$ für alle $P \in \mathrm{P}_n(k)$. Im Allgemeinen ist jedoch $P^{\textcircled{\scriptsize$\top$}} \neq P^{-1}$, wie man an

$$\begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 && \\ && 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{P}_3(k) \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} & 1 && \\ 1 &&& \\ && 1 & \\ &&& 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{P}_4(k)$$

erkennt. Wir erhalten aber eine analoge Aussage für $\mathcal{P}_{2n}$.

Lemma 3.28. *Für alle $P \in \mathcal{P}_{2n}$ ist $P^{\textcircled{\scriptsize$\top$}} = P^{-1}$.*

Beweis. Für $P \in \mathrm{P}_{2n}(k)$ ist $P^{\textcircled{\scriptsize$\top$}} = J_{2n} P^\top J_{2n} = J P^{-1} J$, also genau dann $P^{\textcircled{\scriptsize$\top$}} = P^{-1}$, wenn $P^{-1} \in Z_{\mathrm{P}_{2n}(k)}(J_{2n})$, wenn also $P \in Z_{\mathrm{P}_{2n}(k)}$. Unter ϑ_{2n} korrespondiert $N_{\mathrm{P}_{2n}}(\mathfrak{h})$ zu $N_{S_{2n}}(\mathfrak{h})$ und $Z_{\mathrm{P}_{2n}(k)}(J_{2n})$ zu $Z_{S_{2n}(k)}(\pi_J)$ für $\pi_J := \vartheta_{2n}^{-1}(J_{2n})$. Explizit ergibt sich, dass $\pi_J(i) = 2n + 1 - i$ für alle $i = 1, \ldots, 2n$.

Für alle $\pi \in S_n$ ist

$$\pi_J \tau_\pi \pi_J(i) = \pi_J \tau_\pi(2n + 1 - i) = \pi_J(2n + 1 - \pi(i)) = \pi(i) = \tau_\pi(i) \quad \text{und}$$
$$\pi_J \tau_\pi \pi_J(2n + 1 - i) = \pi_J \tau_\pi(i) = \pi_J(\pi(i)) = 2n + 1 - \pi(i) = \tau_\pi(2n + 1 - i),$$

für jeweils alle $i = 1, \ldots, n$. Also ist $\mathcal{N}_{S_n} \subseteq Z_{S_{2n}}(\pi_J)$. Die Untergruppe $\mathcal{N}_{\mathbb{Z}_2^n}$ wird von den Transpositionen $(i,\, 2n+1-i)$ mit $i = 1, \ldots, n$ erzeugt, und für jede solche Transposition ist

$$\pi_J(i,\ 2n+1-i) = (i,\ 2n+1-i) = (i,\ 2n+1-i)\pi_J.$$

Also ist $\mathcal{N}_{\mathbb{Z}_2^n} \subseteq Z_{S_{2n}}(\pi_J)$. Da $N_{S_{2n}}(\mathfrak{h}) = \mathcal{N}_{\mathbb{Z}_2^n} \rtimes \mathcal{N}_{S_n}$ gilt somit $N_{S_{2n}}(\mathfrak{h}) \subseteq Z_{S_{2n}}(\pi_J)$, und somit $\mathcal{P}_{2n} \subseteq Z_{\mathrm{P}_{2n}(k)}(J_{2n})$. □

3.2.3 Der ungerade Fall $\mathcal{P}_{2n+1}$

Wir betrachten nun den ungeraden Fall. Da $\mathfrak{h}_1 = 0$ ist $\mathcal{P}_1 = \mathrm{P}_1(k) = 1$; wir beschränken un daher im Folgenden auf den Fall $n \geq 1$. Wir schreiben in diesem Abschnitt abkürzend $\mathfrak{h} \coloneqq \mathfrak{h}_{2n+1}$.

Für$H(1, \ldots, n) \in \mathfrak{h}$ mit $H(1, \ldots, n) = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_{2n+1})$ ist $a_i = i$ und $a_{2n+2-i} = -i$ für alle $i = 1, \ldots, n$, sowie $a_{n+1} = 0$. Für $\pi \in N_{S_{2n+1}}(\mathfrak{h})$ sei

$$\operatorname{diag}(b_1, \ldots, b_{2n+1}) \coloneqq \pi \cdot H(1, \ldots, n) \in \mathfrak{h}.$$

Dann ist $a_{n+1} = 0 = b_{n+1} = a_{\pi^{-1}(n+1)}$ und somit $\pi(n+1) = n+1$.

Der Stabilisator $\Delta_{2n+1} \coloneqq \{\pi \in S_{2n+1} \mid \pi(n+1) = n+1\}$ ist deshalb eine Untergruppe mit $N_{S_{2n+1}}(\mathfrak{h}) \subseteq \Delta_{2n+1}$. Insbesondere ist $N_{S_{2n+1}}(\mathfrak{h}) = N_{\Delta_{2n+1}}(\mathfrak{h})$. Die Isomorphismen

$$\psi \colon \Delta_{2n+1} \xrightarrow{\sim} S_{2n},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n+1 \\ \pi(1) & \cdots & \pi(n) & n+1 & \pi(n+2) & \cdots & \pi(2n+1) \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n & n+1 & \cdots & 2n \\ \pi(1) & \cdots & \pi(n) & \pi(n+2) & \cdots & \pi(2n+1) \end{pmatrix}$$

und

$$\Psi \colon \mathfrak{h} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{h}_{2n},$$
$$H_{2n+1}(a_1, \ldots, a_n) \longmapsto H_{2n}(a_1, \ldots, a_n)$$

sind miteinander verträglich. Deshalb schränkt sich sich ψ zu einem Isomorphismus

$$\psi' \colon N_{S_{2n+1}}(\mathfrak{h}) \xrightarrow{\sim} N_{S_{2n}}(\mathfrak{h}_{2n}), \quad \pi \mapsto \psi(\pi)$$

ein.

Wie in Proposition 3.26 gezeigt, ist $N_{S_{2n}}(\mathfrak{h}_{2n}) = \mathcal{N}_{\mathbb{Z}_2^n} \rtimes \mathcal{N}_{S_n}$ für die beiden Untergruppen $\mathcal{N}_{\mathbb{Z}_2^n} = \{\sigma_\varepsilon \mid \varepsilon \in \mathbb{Z}_2^n\}$ und $\mathcal{N}_{S_n} = \{\tau_\pi \mid \pi \in S_n\}$. (Hier nutzen wir, dass $n \geq 1$.)

Definition 3.29. Für alle $\varepsilon \in \mathbb{Z}_2^n$ und $\pi \in S_n$ seien

$$\hat{\sigma}_\varepsilon \coloneqq \psi'^{-1}(\sigma_\varepsilon) \quad \text{und} \quad \hat{\tau}_\pi \coloneqq \psi'^{-1}(\tau_\pi)$$

mit ψ' wie oben, sowie

$$\hat{\mathcal{N}}_{\mathbb{Z}_2^n} \coloneqq \{\hat{\sigma}_\varepsilon \mid \varepsilon \in \mathbb{Z}_2^n\} = \psi'^{-1}(\mathcal{N}_{\mathbb{Z}_2^n}) \quad \text{und} \quad \hat{\mathcal{N}}_{S_n} \coloneqq \{\hat{\tau}_\pi \mid \pi \in S_n\} = \psi'^{-1}(\mathcal{N}_{S_n}).$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}_{2n+1} \arrow[r, "\psi_{2n}"] & \mathcal{P}_{2n} \\
N_{S_{2n+1}}(\mathfrak{h}) \arrow[u, "\vartheta_{2n+1}"] \arrow[r, "\psi'"'] & N_{S_{2n}}(\mathfrak{h}) \arrow[u, "\vartheta_{2n}"']
\end{tikzcd}$$

Abbildung 3.2: Der Isomorphismus $\psi_{2n} \colon \mathcal{P}_{2n+1} \cong \mathcal{P}_{2n}$.

Lemma 3.30. *Es gilt* $N_{S_{2n+1}}(\mathfrak{h}) = \hat{\mathcal{N}}_{\mathbb{Z}_2^n} \rtimes \hat{\mathcal{N}}_{S_n}$.

Beweis. Dies folgt aus Proposition 3.26 mit dem Isomorphismus ψ'. □

Zusammengefasst gelten die Isomorphien

$$\mathcal{P}_{2n+1} \cong N_{S_{2n+1}}(\mathfrak{h}) = \hat{\mathcal{N}}_{\mathbb{Z}_2^n} \rtimes \hat{\mathcal{N}}_{S_n} \cong \mathcal{N}_{\mathbb{Z}_2^n} \rtimes \mathcal{N}_{S_n} \cong \mathbb{Z}_2^n \rtimes S_n,$$

und bezüglich der obigen Isomorphismen entspricht die Konjugationswirkung von $\mathcal{P}_{2n+1}$ auf $\mathfrak{h}$ der Wirkung von $\mathbb{Z}_2^n$ auf $\mathfrak{h}$ mit

$$(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \cdot H(a_1, \dots, a_n) = H(\varepsilon_1 a_1, \dots, \varepsilon_n a_n)$$

für alle $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \mathbb{Z}_2^n$ und $H(a_1, \dots, n) \in h$, zusammen mit der Wirkung von S_n auf $\mathfrak{h}$ mit

$$\pi \cdot H(a_1, \dots, a_n) = H(a_{\pi^{-1}(1)}, \dots, a_{\pi^{-1}(n)})$$

für alle $\pi \in S_n$ und $H(a_1, \dots, a_n) \in h$.

Der Isomorphismus $\psi' \colon N_{S_{2n+1}}(\mathfrak{h}) \to N_{S_{2n}}(\mathfrak{h}_{2n})$ induziert über ϑ_{2n+1} und ϑ_{2n} auch einen Isomorphismus $\psi_{2n} \colon \mathcal{P}_{2n+1} \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}_{2n}$ wie in Abbildung 3.2. Aus der Definition von ψ folgt, dass ψ_{2n} ist durch Streichen der $(n+1)$-ten Zeile und Spalte gegeben ist.

Beispiel 3.31. 1. Wie bereits erwähnt ist $\mathcal{P}_1 = 1$.

2. $\mathcal{P}_3$ besteht aus den beiden Elementen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. $\mathcal{P}_5$ besteht aus den folgenden acht Elementen.

$$\underset{I_5}{\begin{pmatrix} 1 &&&& \\ & 1 &&& \\ && 1 && \\ &&& 1 & \\ &&&& 1 \end{pmatrix}} \quad \underset{\hat{\sigma}_{(-1,1)}}{\begin{pmatrix} &&&& 1 \\ & 1 &&& \\ && 1 && \\ &&& 1 & \\ 1 &&&& \end{pmatrix}} \quad \underset{\hat{\sigma}_{(1,-1)}}{\begin{pmatrix} 1 &&&& \\ &&& 1 & \\ && 1 && \\ & 1 &&& \\ &&&& 1 \end{pmatrix}} \quad \underset{\sigma_{(-1,-1)}}{\begin{pmatrix} &&&& 1 \\ &&& 1 & \\ && 1 && \\ & 1 &&& \\ 1 &&&& \end{pmatrix}}$$

$$\underset{\tau(1,\,2)}{\begin{pmatrix} & 1 &&& \\ 1 &&&& \\ && 1 && \\ &&&& 1 \\ &&& 1 & \end{pmatrix}} \quad \underset{\sigma_{(-1,1)}\tau(1,\,2)}{\begin{pmatrix} &&& 1 & \\ 1 &&&& \\ && 1 && \\ &&&& 1 \\ & 1 &&& \end{pmatrix}} \quad \underset{\sigma_{(1,-1)}\tau(1,\,2)}{\begin{pmatrix} & 1 &&& \\ &&&& 1 \\ && 1 && \\ 1 &&&& \\ &&& 1 & \end{pmatrix}} \quad \underset{\sigma_{(-1,-1)}\tau(1,\,2)}{\begin{pmatrix} &&& 1 & \\ &&&& 1 \\ && 1 && \\ 1 &&&& \\ & 1 &&& \end{pmatrix}}$$

Lemma 3.32. *Für alle $n \geq 1$ und $P \in \mathcal{P}_n$ ist $P^{\textcircled{T}} = P^{-1}$.*

Beweis. Da die Aussage für gerades n bereits als Lemma 3.28 gezeigt wurde, betrachten wir im Folgenden den Fall, das n ungerade ist. Da $\mathcal{P}_1 = \{(1)\}$ genügt es zudem, denn Fall $n \geq 3$ zu betrachten.

Es sei $P \in \mathcal{P}_n$. Da ψ_{2n} durch Streichen der $(n+1)$-ten Spalte und Zeile gegeben ist, gilt $\psi_{2n}(P^{\textcircled{T}}) = \psi_{2n}(P)^{\textcircled{T}}$, und deshalb nach Lemma 3.28

$$\psi_{2n}(P^{\textcircled{T}}) = \psi_{2n}(P)^{\textcircled{T}} = \psi_{2n}(P)^{-1} = \psi_{2n}(P^{-1}).$$

Aus der Injektivität von ψ_{2n} folgt damit, dass $P^{\textcircled{T}} = P^{-1}$. □

3.3 Halbeinfache Orbiten in $\mathfrak{so}_{2n}(k)$

Wir betrachten zunächst den geraden Fall $\mathfrak{so}_{2n}(k)$. Im Folgenden schreiben wir abkürzend $G := \mathrm{O}(J_{2n})$ und $SG := \mathrm{SO}(J_{2n})$.

3.3.1 Bezüglich der Konjugationswirkung von $\mathrm{O}_{2n}(k)$

Nach Lemma 3.32 ist $\mathcal{P}_{2n} \subseteq G$, und somit $\Lambda(G) = \mathcal{P}_{2n}$. Zusammen mit dem Isomorphismus $\mathcal{P}_{2n} \cong \mathbb{Z}_2^n \rtimes S_n$ aus Proposition 3.26 und $k^n \cong \mathfrak{h}, (a_1, \ldots, a_n) \mapsto H(a_1, \ldots, a_n)$ ergibt sich damit nach Korollar 3.22 die folgende Parametrisierung der halbeinfachen Orbiten.

Proposition 3.33. *Es gibt eine Bijektion*

$$\begin{aligned} k^n / (\mathbb{Z}_2^n \rtimes S_n) &\xrightarrow{\sim} \mathcal{S}(\mathfrak{o}(J_{2n}), \mathrm{O}(J_{2n})), \\ [(a_1, \ldots, a_n)] &\longmapsto \mathcal{O}_{H_{2n}(a_1, \ldots, a_n)}, \end{aligned}$$

wobei $\mathbb{Z}_2^n$ auf k^n durch

$$(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \cdot (a_1, \ldots, a_n) = (\varepsilon_1 a_1, \ldots, \varepsilon_n a_n)$$

wirkt, und S_n durch

$$\pi \cdot (a_1, \ldots, a_n) = (a_{\pi^{-1}}(1), \ldots, a_{\pi^{-1}(n)}).$$

3.3.2 Bezüglich der Konjugationswirkung von $\mathrm{SO}_{2n}(k)$

Zur Anwendung von Korollar 3.22 gilt es $\Lambda(\mathrm{SO}(J_{2n}))$ zu bestimmen.

Sind $D \in \mathrm{D}_n(k)$ und $P \in \mathcal{P}_{2n}$ mit $DP \in SG$ so ist nach Lemma 3.12 bereits $D, P \in G$. Für $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{2n})$ ist $D^{\textcircled{T}} = \mathrm{diag}(\lambda_{2n}, \ldots, \lambda_1)$, wegen $D^{\textcircled{T}} = D^{-1}$ also $\lambda_{2n+1-i} = \lambda_i^{-1}$ für alle $i = 1, \ldots, 2n$. Daher ist insbesondere

$$\det D = \lambda_1 \cdots \lambda_n \cdot \lambda_{n+1} \cdots \lambda_{2n} = \lambda_1 \cdots \lambda_n \cdot \lambda_n^{-1} \cdots \lambda_1^{-1} = 1,$$

und somit $1 = \det M = \det P$. Also ist bereits $P \in \mathcal{P}_{2n}^+$. Für $P \in \mathcal{P}_{2n}^+$ ist andererseits $P \in G$ nach Lemma 3.32, und wegen $\det P = 1$ auch schon $P \in \mathrm{SO}(J_{2n})$. Also ist

$$\Lambda(\mathrm{SO}(J_{2n})) = \{P \in \mathcal{P}_{2n} \mid \text{es gibt } D \in \mathrm{D}_n(k) \text{ mit } DP \in SG\} = \mathcal{P}_{2n}^+.$$

Wir wollen noch eine Parametrisierung für $\mathcal{P}_{2n}^+$ angeben. Für den Isomorphismus $\vartheta_{2n}\colon S_{2n} \to \mathrm{P}_{2n}(k), \pi \mapsto T_\pi$ ist $\det T_\pi = \operatorname{sgn}\pi$ für jedes $\pi \in S_{2n}$. Deshalb schränkt sich ϑ_{2n} zu einem Isomorphismus $\mathcal{P}_{2n}^+ \cong N_{S_{2n}}(\mathfrak{h}) \cap A_{2n}$ ein, wobei $A_{2n} \subseteq S_{2n}$ die alternierende Gruppe bezeichnet.

Da S_n von den Transpositionen $\pi_i := (i,\ \ i{+}1)$ mit $i = 1, \dots, n{-}1$ erzeugt wird, wird $\mathcal{N}_{S_n}$ von den Permutationen $\tau_{\pi_i} = (i,\ \ i+1)(2n+1-i,\ \ 2n-i)$ mit $i = 1, \dots, n-1$ erzeugt. Damit ist insbesondere $\operatorname{sgn}\tau_\pi = 1$ für alle $\pi \in S_n$. Für alle $\varepsilon \in \mathbb{Z}_2^n$ ist σ_ε das Produkt von von $m_\varepsilon := |\{i \in \{1, \dots, n\} \mid \varepsilon_i = -1\}|$ vielen Transpositionen mit $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$. Daher ist $\det \sigma_\varepsilon = (-1)^{m_\varepsilon} = \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n$ für alle $\varepsilon \in \mathbb{Z}_2^n$.

Definition 3.34. Es sei

$$\operatorname{sgn}\colon \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{Z}_2, \quad (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \mapsto \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n.$$

$\varepsilon \in \mathbb{Z}_2^n$ heißt *gerade*, falls $\operatorname{sgn}\varepsilon = 1$, und *ungerade* falls $\operatorname{sgn}\varepsilon = -1$.

Lemma 3.35. $\operatorname{sgn}\colon \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{Z}_2$ *ist ein Gruppenhomomorphismus mit*

$$\ker \operatorname{sgn} = \{\varepsilon \in \mathbb{Z}_2^n \mid \varepsilon \textit{ ist gerade}\},$$

und es gibt einen Isomorphismus von Gruppen

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_2^{n-1} &\xrightarrow{\sim} \ker \operatorname{sgn}, \\ (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}) &\longmapsto (\varepsilon_1, \varepsilon_1\varepsilon_2, \varepsilon_2\varepsilon_3, \dots, \varepsilon_{n-2}\varepsilon_{n-1}, \varepsilon_{n-1}). \end{aligned}$$

Für beliebiges $\omega \in N_{S_{2n}}(\mathfrak{h})$ mit $\omega = \sigma_\varepsilon \tau_\pi$ bezüglich. $N_{S_{2n}}(\mathfrak{h}) = \mathcal{N}_{\mathbb{Z}_2^n} \rtimes \mathcal{N}_{S_n}$ ist deshalb $\det \omega = \det \tau_\pi \det \sigma_\varepsilon = \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n = \operatorname{sgn}\varepsilon$. Deshalb schränkt sich die Zerlegung $N_{S_{2n}}(\mathfrak{h}) = \mathcal{N}_{\mathbb{Z}_2^n} \rtimes \mathcal{N}_{S_n}$ zu einer Zerlegung

$$N_{S_{2n}}(\mathfrak{h}) \cap A_{2n} = \mathcal{N}_{\mathbb{Z}_2^n}^+ \rtimes \mathcal{N}_{S_n}$$

ein, wobei $\mathcal{N}_{\mathbb{Z}_2^n}^+ = \{\sigma_\varepsilon \mid \varepsilon \in \mathbb{Z}_2^n \text{ ist gerade}\} \cong \mathbb{Z}_2^{n-1}$ durch den Isomorphismus auf Lemma 3.35.

Es gilt also

$$\Lambda(\mathrm{SO}(J_{2n})) = \mathcal{P}_{2n}^+ \cong \mathbb{Z}_2^{n-1} \rtimes S_n.$$

und zusammen mit dem Isomorphismus $k^n \cong \mathfrak{h}, (a_1, \dots, a_n) \mapsto H(a_1, \dots, a_n)$ ergibt sich damit nach Korollar 3.22 die folgende Parametrisierung der halbeinfachen Orbiten.

Proposition 3.36. *Es gibt eine Bijektion*

$$\begin{aligned} k^n/(\mathbb{Z}_2^{n-1} \rtimes S_n) &\xrightarrow{\sim} \mathcal{S}(\mathfrak{o}(J_{2n}), \mathrm{SO}(J_{2n})), \\ [(a_1, \dots, a_n)] &\longmapsto \mathcal{O}_{H_{2n}(a_1, \dots, a_n)}, \end{aligned}$$

wobei $\mathbb{Z}_2^{n-1}$ auf k^n durch

$$(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}) \cdot (a_1, \dots, a_n) = (\varepsilon_1 a_1, \varepsilon_1\varepsilon_2 a_2, \dots, \varepsilon_{n-2}\varepsilon_{n-1} a_{n-1}, \varepsilon_{n-1} a_n)$$

wirkt, und S_n durch

$$\pi \cdot (a_1, \dots, a_n) = (a_{\pi^{-1}(1)}, \dots, a_{\pi^{-1}(n)}).$$

Insbesondere ergibt sich im Vergleich zu Proposition 3.33, dass die halbeinfachen Orbiten bezüglich $\mathrm{SO}_{J_{2n}}$ im Allgemeinen echt kleiner sind, als die halbeinfachen Orbiten bezüglich $\mathrm{O}_{J_{2n}}$.

3.3.3 Die halbeinfachen Orbiten in $\mathfrak{so}_{2n}(k)$ selbst

Es sei $\Phi_{2n}\colon \mathfrak{o}(J_{2n}) \to \mathfrak{so}_{2n}(k)$ der Isomorphismus von Lie-Algebren aus Lemma 3.6, d.h. es sei $\Phi_{2n}(A) = \Gamma_{2n} A \Gamma_{2n}^{-1}$ für alle $A \in \mathfrak{o}(J_{2n})$. Durch explizites Nachrechnen ergibt sich, dass für alle $H(a_1, \dots, a_n) \in \mathfrak{h}$

$$\begin{aligned}\Phi_{2n}(H(a_1, \dots, a_n)) &= \Gamma H(a_1, \dots, a_n)\Gamma^{-1} \\ &= \operatorname{adiag}(-ia_1, \dots, -ia_n, ia_n, \dots, ia_1).\end{aligned}$$

Zusammen mit dem Isomorphismus $k^n \cong k^n, a \mapsto ia$ ergeben sich damit nach Lemma 3.7 aus den Propositionen 3.33 und 3.36 die folgenden Parametrisierung der halbeinfachen Orbiten in $\mathfrak{so}_{2n}(k)$.

Korollar 3.37. *Es gibt eine Bijektion*

$$\begin{aligned}k^n/(\mathbb{Z}_2^n \rtimes S_n) &\xrightarrow{\sim} \mathcal{S}(\mathfrak{so}_{2n}(k), \mathrm{O}_{2n}(k)) \\ (a_1, \dots, a_n) &\longmapsto \mathcal{O}_{\operatorname{adiag}(a_1, \dots, a_n, -a_n, \dots, -a_1)},\end{aligned}$$

wobei $\mathbb{Z}_2^n \rtimes S_n$ auf k^n wie in Proposition 3.33 wirkt, und eine Bijektion

$$\begin{aligned}k^n/(\mathbb{Z}_2^{n-1} \rtimes S_n) &\xrightarrow{\sim} \mathcal{S}(\mathfrak{so}_{2n}(k), \mathrm{SO}_{2n}(k)) \\ [(a_1, \dots, a_n)] &\longmapsto \mathcal{O}_{\operatorname{adiag}(a_1, \dots, a_n, -a_n, \dots, -a_1)},\end{aligned}$$

wobei $(\mathbb{Z}_2^n)^{n-1} \rtimes S_n$ auf k^n wie in Proposition 3.36 wirkt.

3.3.4 Beispiel $\mathfrak{o}(J_4)(k)$

Wir betrachten zur Verdeutlichung der vorherigen Klassifikation den Spezialfall $\mathfrak{o}(J_4)$, also $n = 2$. Es ist

$$\mathfrak{o}(J_4) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c & 0 \\ d & e & 0 & -c \\ f & 0 & -e & -b \\ 0 & -f & -d & -a \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c, d, e, f \in k \right\}$$

mit CSA

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_4 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in k \right\} = \{H(a, b) \mid a, b \in k\}.$$

$\mathcal{P}_4$ ist wie in Beispiel 3.27 und wirkt auf $\mathfrak{h}$ durch

$$\begin{aligned}
\mathrm{id} \cdot H(a,b) &= H(a,b) & \tau_{(1,\,2)} \cdot H(a,b) &= H(b,a), \\
\sigma_{(-1,1)} \cdot H(a,b) &= H(-a,b), & \sigma_{(-1,1)}\tau_{(1,\,2)} \cdot H(a,b) &= H(-b,a), \\
\sigma_{(1,-1)} \cdot H(a,b) &= H(a,-b), & \sigma_{(1,-1)}\tau_{(1,\,2)} \cdot H(a,b) &= H(b,-a), \\
\sigma_{(-1,-1)} \cdot H(a,b) &= H(-a,-b), & \sigma_{(-1,-1)}\tau_{(1,\,2)} \cdot H(a,b) &= H(-b,-a),
\end{aligned}$$

wobei wir die Identifikationen $\mathcal{P}_4 \cong \mathcal{N}_{\mathbb{Z}_2^2} \rtimes \mathcal{N}_{S_2}$ nutzen. Da $\Lambda(\mathrm{O}(J_4)) = \mathcal{P}_4$ ergibt sich nach Korollar 3.22 die Bijektion

$$\begin{aligned}
\mathfrak{h}/\mathcal{P}_4 &\xrightarrow{\sim} \mathcal{S}(\mathfrak{o}(J_4), \mathrm{O}(J_4)), \\
[H(a,b)] &\longmapsto \mathcal{O}_{H(a,b)}.
\end{aligned}$$

Unter $\mathrm{O}(J_4)$ wird also $H(a,b)$ mit den Elementen in $\mathfrak{h}$ identifiziert, die durch Permutation der beiden Argumente a, b und dem Alternieren ihrer Vorzeichen entstehen.

$\mathcal{P}_4^+$ besteht aus den folgenden vier Elementen.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}}_{I_4 = \sigma_{(1,1)} = \tau_{\mathrm{id}}} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}}_{\sigma_{(-1,-1)}} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} & 1 & & \\ 1 & & & \\ & & & 1 \\ & & 1 & \end{pmatrix}}_{\tau_{(1,\,2)}} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} & & 1 & \\ & & & 1 \\ 1 & & & \\ & 1 & & \end{pmatrix}}_{\sigma_{(-1,-1)}\tau_{(1,\,2)}}$$

Und da $\Lambda(S_{J_4}) = \mathcal{P}_4^+$ ergibt sich nach Korollar 3.22 die Bijektion

$$\begin{aligned}
\mathfrak{h}/\mathcal{P}_4^+ &\xrightarrow{\sim} \mathcal{S}(\mathfrak{o}(J_4), \mathrm{SO}(J_4)), \\
[H(a,b)] &\longmapsto \mathcal{O}_{H(a,b)}.
\end{aligned}$$

Unter $\mathrm{SO}(J_2)$ wird also $H(a,b)$ mit den Elementen in $\mathfrak{h}$ identifiziert, die durch Permutation der beiden Argumente a, b und dem Alternieren einer geraden Anzahl von Vorzeichen entstehen. So sind etwa $H(1,2)$ und $H(1,-2)$ konjugiert unter $\mathrm{O}(J_4)$, nicht aber unter $\mathrm{SO}(J_4)$.

3.4 Halbeinfache Orbiten in $\mathfrak{so}_{2n+1}(k)$

Wir betrachten nun den ungeraden Fall $\mathfrak{so}_{2n+1}(k)$. Dabei betrachten wir nur die Fälle $n \geq 1$, da $\mathfrak{so}_1(k) = 0$ ausreichend gut verstanden ist. Im Folgenden sei abkürzend $G \coloneqq \mathrm{O}(J_{2n+1})$ und $SG \coloneqq \mathrm{SO}(J_{2n+1})$.

3.4.1 Unter der Konjugationswirkung von $\mathrm{O}_{2n+1}(k)$

Nach Lemma 3.32 ist $\mathcal{P}_{2n+1} \subseteq G$, als ist $\Lambda(G) = \mathcal{P}_{2n+1}$. Zusammen mit den Isomorphismen $\mathcal{P}_{2n+1} \cong \mathbb{Z}_2^n \rtimes S_n$ und $k^n \cong \mathfrak{h}, (a_1, \ldots, a_n) \mapsto H(a_1, \ldots, a_n)$ ergibt sich aus Korollar 3.22 die folgende Parametrisierung der halbeinfachen Orbiten.

Proposition 3.38. *Es gibt eine Bijektion*

$$\begin{aligned} k^n / (\mathbb{Z}_2^n \rtimes S_n) &\xrightarrow{\sim} \mathcal{S}(\mathfrak{o}(J_{2n+1}), \mathrm{O}(J_{2n+1})), \\ [(a_1, \ldots, a_n)] &\longmapsto \mathcal{O}_{H_{2n+1}(a_1,\ldots,a_n)}, \end{aligned}$$

wobei $\mathbb{Z}_2^n$ auf k^n durch

$$(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \cdot (a_1, \ldots, a_n) = (\varepsilon_1 a_1, \ldots, \varepsilon_n a_n)$$

wirkt, und S_n durch

$$\pi \cdot (a_1, \ldots, a_n) = (a_{\pi^{-1}}(1), \ldots, a_{\pi^{-1}(n)}).$$

3.4.2 Unter der Konjugationswirkung von $\mathrm{SO}_{2n+1}(k)$

Um Korollar 3.22 anzuwenden, gilt es $\Lambda(\mathrm{SO}(J_{2n+1}))$ zu bestimmen, also die Menge der $P \in \mathcal{P}_{2n+1}$, für die es ein $D \in \mathrm{D}_{2n+1}(k)$ mit $DP \in SG$ gibt. Da $\mathcal{P}_{2n+1} \subseteq G$ nach Lemma 3.32, haben alle Elemente von $\mathcal{P}_{2n+1}^+$ diese Eigenschaft. Für die Diagonalmatrix

$$V := \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, -1, 1, \ldots, 1) \text{ mit } -1 \text{ an der } (n+1)\text{-ten Stelle}$$

ist $V^{-1} = V = V^{\textcircled{T}}$ und $\det V = -1$. Für $P \in \mathcal{P}_{2n+1}^-$ ist wegen $V, P \in G$ auch $VP \in G$ mit $\det VP = \det V \det P = (-1)(-1) = 1$, also $VP \in SG$. Damit gibt es für jedes $P \in \mathcal{P}_{2n+1}$ ein $D \in \mathrm{D}_{2n+1}(k)$ mit $DP \in SG$. Also ist $\Lambda(\mathrm{SO}(J_{2n+1})) = \mathcal{P}_{2n+1}$.

Insbesondere ist

$$\Lambda(\mathrm{SO}(J_{2n+1})) = \mathcal{P}_{2n+1} = \Lambda(\mathrm{O}(J_{n+1})).$$

Nach Korollar 3.22 ist deshalb $\mathcal{S}(\mathfrak{o}(J_{2n+1}), \mathrm{O}(J_{2n+1})) = \mathcal{S}(\mathfrak{o}(J_{2n+1}), \mathrm{SO}(J_{2n+1}))$, und es lässt sich insbesondere die Parametrisierung aus Proposition 3.38 verwenden.

Proposition 3.39. *Es gibt eine Bijektion*

$$\begin{aligned} k^n / (\mathbb{Z}_2^n \rtimes S_n) &\xrightarrow{\sim} \mathcal{S}(\mathfrak{o}(J_{2n+1}), \mathrm{SO}(J_{2n+1})), \\ [(a_1, \ldots, a_n)] &\longmapsto \mathcal{O}_{H_{2n+1}(a_1,\ldots,a_n)}, \end{aligned}$$

wobei $\mathbb{Z}_2^n \rtimes S_n$ auf k^n wirkt wie in 3.38.

3.4.3 Die halbeinfachen Orbiten in $\mathfrak{so}_{2n+1}(k)$ selbst

Es sei $\Phi_{2n+1} \colon \mathfrak{o}(J_{2n+1}) \to \mathfrak{so}_{2n+1}(k)$ der Isomorphismus von Lie-Algebran aus Lemma 3.6, d.h. $\Phi_{2n+1}(A) = \Gamma_{2n+1} A \Gamma_{2n+1}^{-1}$ für alle $A \in \mathfrak{so}(J_{2n+1})$. Durch direktes Nachrechnen ergibt sich, dass für alle $H(a_1, \ldots, a_n) \in \mathfrak{h}$

$$\begin{aligned} \Phi_{2n+1}(H(a_1, \ldots, a_n)) &= \Gamma_{2n+1} H(a_1, \ldots, a_n) \Gamma_{2n+1}^{-1} \\ &= \mathrm{adiag}(-ia_1, \ldots, -ia_n, 0, \ldots, ia_n, \ldots, ia_1). \end{aligned}$$

Zusammen mit der Isomorphismus $k^n \cong \mathfrak{h}, (a_1, \ldots, a_n) \mapsto H(a_1, \ldots, a_n)$ ergibt sich damit nach Lemma 3.7 aus den Propositionen 3.38 und 3.39 die folgende Parametrisierung der halbeinfachen Orbiten in $\mathfrak{so}_{2n+1}(k)$.

Korollar 3.40. *Es gibt eine Bijektion*

$$\begin{aligned} k^n/(\mathbb{Z}_2^n \rtimes S_n) &\xrightarrow{\sim} \mathcal{S}(\mathfrak{so}_{2n+1}(k), \mathrm{O}_{2n+1}(k)) = \mathcal{S}(\mathfrak{so}_{2n+1}(k), \mathrm{SO}_{2n+1}(k)) \\ (a_1, \dots, a_n) &\longmapsto \mathcal{O}_{\mathrm{adiag}(a_1,\dots,a_n,-a_n,\dots,-a_1)}, \end{aligned}$$

wobei $\mathbb{Z}_2^n \rtimes S_n$ auf k^n wie in Proposition 3.38 wirkt.

3.5 Halbeinfache Orbiten in $\mathfrak{sp}_{2n}(k)$

Wir bestimmen nun die halbeinfachen Orbiten in $\mathfrak{sp}_{2n}(k)$ unter der Konjugationswirkung von $\mathrm{Sp}_{2n}(k)$.

3.5.1 Die halbeinfachen Orbiten in $\mathfrak{o}(K_{2n})$ unter $\mathrm{O}(K_{2n})$

Wir fixieren in diesem Abschnitt ein beliebiges $n \geq 1$ und schreiben im Folgenden abkürzend $G \coloneqq \mathrm{O}(K_{2n})$ und $K \coloneqq K_{2n}$.

Um Korollar 3.22 anzuwenden, gilt es $\Lambda(G)$ zu bestimmen, also all jene $P \in \mathcal{P}_{2n}$, für die es eine Diagonalmatrix $D \in \mathrm{D}_{2n}(k)$ mit $DP \in G$ gibt; wir zeigen, dass dies für alle $P \in \mathcal{P}_{2n}$ gilt. Wegen den konstruierten Isomorphien $\mathcal{P}_{2n} \cong N_{S_{2n}}(\mathfrak{h}_{2n}) = \mathcal{N}_{\mathbb{Z}_2^n} \rtimes \mathcal{N}_{S_n}$ wird $\mathcal{P}_{2n}(k)$ von den Matrizen B_ε und B_π mit

$$B_\varepsilon \coloneqq \vartheta_{2n}^{-1}(\sigma_\varepsilon) \quad \text{und} \quad B_\pi \coloneqq \vartheta_{2n}^{-1}(\tau_\pi) \quad \text{für } \varepsilon \in \mathbb{Z}_2^n \text{ und } \pi \in S_n$$

erzeugt. Nach Proposition 3.21 genügt es die Aussage für diese Erzeuger zu zeigen.

Für $\pi \in S_n$ ist für alle $i = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} B_\pi^\top K B_\pi e_i &= B_\pi^{-1} K e_{\pi(i)} = B_{\pi^{-1}}(-e_{2n+1-\pi(i)}) = -e_{2n+1-i} = K e_i \quad \text{und} \\ B_\pi^\top K B_\pi e_{2n+1-i} &= B_\pi^{-1} K e_{2n+1-\pi(i)} = B_{\pi^{-1}} e_{\pi(i)} = e_i = K e_{2n+1-i} \end{aligned}$$

und somit $B_\pi^\top K B_\pi = K$. Also ist $B_\pi \in G$ für alle $\pi \in S_n$.

Für alle $i = 1, \dots, 2n$ sei $i^* = 2n + 1 - i$ und $|i| \coloneqq \min(i, 2n + 1 - i)$, also

$$|i| = \begin{cases} i & \text{falls } 1 \leq i \leq n, \\ 2n + 1 - i & \text{falls } n + 1 \leq i \leq 2n, \end{cases}$$

und es sei $K = \mathrm{adiag}(\delta_{2n}, \dots, \delta_1)$, also

$$\delta_i = \begin{cases} -1 & \text{falls } 1 \leq i \leq n, \\ 1 & \text{falls } n + 1 \leq i \leq 2n. \end{cases}$$

Für alle $i = 1, \dots, 2n$ ist dann $(i^*)^* = i$, $|i^*| = |i|$, $\delta_{i^*} = -\delta_i$ und $K e_i = \delta_i e_{i^*}$, und für alle $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \mathbb{Z}_2^n$ ist

$$B_\varepsilon e_i = \begin{cases} e_i & \text{falls } \varepsilon_{|i|} = 1, \\ e_{i^*} & \text{falls } \varepsilon_{|i|} = -1. \end{cases}$$

Es sei zudem

$$D_\varepsilon := (\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}) := (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, 1, \dots, 1) \in \mathrm{D}_{2n}(k).$$

(Wir betrachten $\mathbb{Z}_2$ nach wie vor als multiplikative Untergruppe $\{1, -1\} \subseteq k^\times$.) Für alle $i = 1, \dots, 2n$ ist $\lambda_i \lambda_i^* = \varepsilon_{|i|}$. Ist $1 \leq i \leq 2n$ mit $\varepsilon_{|i|} = 1$, so ist

$$\begin{aligned} (D_\varepsilon B_\varepsilon)^\top K D_\varepsilon B_\varepsilon e_i &= B_\varepsilon D_\varepsilon K D_\varepsilon e_i = \lambda_i B_\varepsilon D_\varepsilon K e_i \\ &= \lambda_i \delta_i B_\varepsilon D_\varepsilon e_{i^*} = \lambda_i \lambda_{i^*} \delta_i B_\varepsilon e_{i^*} = \varepsilon_{|i|} \delta_i e_{i^*} = K e_i, \end{aligned}$$

und für $\varepsilon_{|i|} = -1$ ist

$$\begin{aligned} (D_\varepsilon B_\varepsilon)^\top K D_\varepsilon B_\varepsilon e_i &= B_\varepsilon D_\varepsilon K D_\varepsilon e_{i^*} = \lambda_{i^*} B_\varepsilon D_\varepsilon K e_{i^*} \\ &= \lambda_{i^*} \delta_{i^*} B_\varepsilon D_\varepsilon e_i = \lambda_i \lambda_{i^*} \delta_{i^*} B_\varepsilon e_i = -\varepsilon_{|i|} \delta_i e_{i^*} = K e_i. \end{aligned}$$

Es ist also $(D_\varepsilon B_\varepsilon)^\top K (D_\varepsilon B_\varepsilon) = K$ und somit $D_\varepsilon B_\varepsilon \in G$.

Es ist also

$$\Lambda(\mathrm{O}(K_{2n})) = \mathcal{P}_{2n} \cong \mathbb{Z}_2^n \rtimes S_n,$$

und mit dem Isomorphismus $k^n \to \mathfrak{h}, (a_1, \dots, a_n) \mapsto H(a_1, \dots, a_n)$ ergibt sich nach Korollar 3.22 die folgende Parametrisierung der halbeinfachen Orbiten.

Proposition 3.41. *Es gibt eine Bijektion*

$$\begin{aligned} k^n / (\mathbb{Z}_2^n \rtimes S_n) &\xrightarrow{\sim} \mathcal{S}(\mathfrak{o}(K_{2n}), \mathrm{O}(K_{2n})), \\ [(a_1, \dots, a_n)] &\longmapsto \mathcal{O}_{H_{2n}(a_1, \dots, a_n)}, \end{aligned}$$

wobei $\mathbb{Z}_2^n$ auf k^n durch

$$(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \cdot (a_1, \dots, a_n) = (\varepsilon_1 a_1, \dots, \varepsilon_n a_n)$$

wirkt, und S_n durch

$$\pi \cdot (a_1, \dots, a_n) = (a_{\pi^{-1}}(1), \dots, a_{\pi^{-1}(n)}).$$

3.5.2 Die halbeinfachen Orbiten in $\mathfrak{sp}_{2n}(k)$ selbst

Für alle $A, B \in \mathrm{M}_n(k)$ ist

$$\Upsilon_{2n} \begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix} \Upsilon_{2n}^{-1} = \begin{pmatrix} A & \\ & JBJ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \\ & (B^{\oplus})^\top \end{pmatrix},$$

für alle $H(a_1, \dots, a_n) \in \mathfrak{h}_{2n}$ ist daher

$$\Phi(H(a_1, \dots, a_n)) = \Upsilon_{2n} H(a_1, \dots, a_n) \Upsilon_{2n}^{-1} = \operatorname{diag}(a_1, \dots, a_n, -a_1, \dots, -a_n).$$

Damit ergibt sich nach Korollar 3.15 aus Proposition 3.41 die folgende Parametrisierung der halbeinfachen Orbiten in $\mathfrak{sp}_{2n}(k)$.

Korollar 3.42. *Es gibt eine Bijektion*

$$\begin{aligned} k^n / (\mathbb{Z}_2^n \rtimes S_n) &\xrightarrow{\sim} \mathcal{S}(\mathfrak{sp}_{2n}(k), \mathrm{Sp}_{2n}(k)), \\ [(a_1, \dots, a_n)] &\longmapsto \mathcal{O}_{\operatorname{diag}(a_1, \dots, a_n, -a_1, \dots, -a_n)}, \end{aligned}$$

wobei $\mathbb{Z}_2^n \rtimes S_n$ auf k^n wirkt wie in Proposition 3.41.

4 Klassifikation nilpotenter Orbiten durch $\mathfrak{sl}_2$-Tripel

In diesem Kapitel geben wir einen Ausblick auf die Klassifikation nilpotenter Orbiten in halbeinfachen Lie-Algebren, wobei wir uns an [CM93, §3] orientieren. Hierfür konstruieren wir eine Korrespondenz zwischen den nilpotenten Orbiten und gewissen Konjugationsklassen von $\mathfrak{sl}_2$-Tripeln. Als Anwendung hiervon bestimmen wir anschließend die nilpotenten Orbiten in $\mathfrak{gl}_2(k)$ und $\mathfrak{gl}_3(k)$.

4.1 Nilpotente Orbiten und $\mathfrak{sl}_2$-Tripel

In diesem Abschnitt definieren wir zunächst $\mathfrak{sl}_2$-Tripel, sowie nilpotente Orbiten in reduktiven Lie-Algebren. Anschließend beginnen wir, den Zusammenhang zwischen diesen zu beleuchten.

4.1.1 Definition und grundlegende Eigenschaften von $\mathfrak{sl}_2$-Tripeln

Definition 4.1. Ein $\mathfrak{sl}_2$-*Tripel* in einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ist ein Tupel (E, H, F) von Elementen $E, H, F \in \mathfrak{g}$, so dass $[H, E] = 2E$, $[H, F] = -2F$ und $[E, F] = H$. Es bezeichnet

$$\Delta(\mathfrak{g}) \coloneqq \{(E, H, F) \mid (E, H, F) \text{ ist ein } \mathfrak{sl}_2\text{-Tripel in } \mathfrak{g}\}$$

die Menge der $\mathfrak{sl}_2$-Tripel in $\mathfrak{g}$.

Ein $\mathfrak{sl}_2$-Tripel $T \coloneqq (E, H, F)$ in einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ beschreibt einen Homomorphismus $\phi_T : \mathfrak{sl}_2(k) \to \mathfrak{g}$ durch $\phi_T(e) = E$, $\phi_T(h) = H$ und $\phi_T(f) = F$. Ist andererseits $\phi : \mathfrak{sl}_2(k) \to \mathfrak{g}$ ein Homomorphismus, so ist $(\phi(e), \phi(h), \phi(f))$ ein $\mathfrak{sl}_2$-Tripel in $\mathfrak{g}$. Für

$$\operatorname{Hom}_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{sl}_2(k), \mathfrak{g}) \coloneqq \{\phi : \mathfrak{sl}_2(k) \to \mathfrak{g} \mid \phi \text{ ist ein Homomorphismus}\}$$

ergibt sich damit die folgende Korrespondenz.

Lemma 4.2. *Ist $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra, so gibt es eine Bijektion*

$$\begin{aligned} \Delta(\mathfrak{g}) &\xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{sl}_2(k), \mathfrak{g}), \\ T &\longmapsto \phi_T, \\ (\phi(e), \phi(h), \phi(f)) &\longleftarrow\!\shortmid \phi. \end{aligned}$$

Korollar 4.3. *Ist $\mathfrak{g}$ eine reduktive Lie-Algebra, so ist $\Delta(\mathfrak{g}) = \Delta([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}])$.*

Beweis. Dass $\Delta([\mathfrak{g},\mathfrak{g}]) \subseteq \Delta(\mathfrak{g})$ folgt direkt aus der Definition von $\mathfrak{sl}_2$-Tripeln. Es sei $(E,H,F) \in \Delta(\mathfrak{g})$ und $\phi\colon \mathfrak{sl}_2(k) \to \mathfrak{g}$ ein Homomorphismus mit $\phi(e) = E$, $\phi(h) = H$ und $\phi(f) = F$. Nach Lemma 1.38 ist bereits $\operatorname{im}\phi \subseteq [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$, da $\mathfrak{sl}_2(k)$ halbeinfach ist. Insbesondere ist somit $(E,H,F) \in \Delta([\mathfrak{g},\mathfrak{g}])$. □

Ist $T = (E,H,F)$ ein $\mathfrak{sl}$-Tripel in einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$, so wird $\mathfrak{g}$ zu einer endlichdimensionalen Darstellung von $\mathfrak{sl}_2(k)$ durch

$$\mathfrak{sl}_2(k) \xrightarrow{\Phi_T} \mathfrak{g} \xrightarrow{\operatorname{ad}_\mathfrak{g}} \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}).$$

Dann wirkt e per $\operatorname{ad} E$, h durch $\operatorname{ad} H$ und f durch $\operatorname{ad} F$ auf $\mathfrak{g}$. Dies erlaubt es uns, die Wirkung der Elemente E, H und F durch die bekannte Darstellungstheorie von $\mathfrak{sl}_2(k)$ zu verstehen. Es ist daher im Allgemeinen begehrenswert, möglichst viele Elemente als Teil eines $\mathfrak{sl}_2$-Tripels darzustellen.

4.1.2 Nilpotente Orbiten

Analog zu der Definition halbeinfacher Orbiten ergibt sich die Definition nilpotenter Orbiten.

Definition 4.4. Es sei $\mathfrak{g}$ eine reduktive Lie-Algebra und G eine Gruppe, die per Lie-Algebra-Automorphismen auf $\mathfrak{g}$ wirkt. Für $X \in \mathfrak{g}$ bezeichnet

$$\mathcal{O}_X := G \cdot X = \{s \cdot X \mid s \in G\}$$

den *Orbit* von X unter G. Ein Orbit $\mathcal{O} \subseteq \mathfrak{g}$ heißt *nilpotent*, wenn er aus nilpotenten Elementen besteht, und es bezeichnet

$$\mathcal{N}(\mathfrak{g}, G) := \{\mathcal{O} \subseteq \mathfrak{g} \mid \mathcal{O} \text{ ist ein nilpotenter Orbit}\}$$

die Menge der nilpotenten Orbiten in $\mathfrak{g}$ unter G.

Bemerkung 4.5. Ist $\mathfrak{g}$ eine reduktive Lie-Algebra, so sind die nilpotenten Elemente in $\mathfrak{g}$ per Definition genau die nilpotenten Elemente in $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$. Außerdem ist $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ invariant unter $\operatorname{Aut}\mathfrak{g}$. Daher ist $\mathcal{N}(\mathfrak{g}, G) = \mathcal{N}([\mathfrak{g},\mathfrak{g}], G)$. Es genügt daher, sich im restlichen Vorgehen auf halbeinfache Lie-Algebren zu beschränken.

Insbesondere sind die nilpotenten Orbiten in $\mathfrak{gl}_n(k)$ unter der Konjugationswirkung von $\mathrm{GL}_n(k)$ genau die nilpotenten Orbiten in $\mathfrak{sl}_n(k)$ unter dieser Wirkung.

Ist X ein nilpotentes Element einer halbeinfachen Lie-Algebra $\mathfrak{g}$, so ist

$$\operatorname{ad}\phi(X) = \phi(\operatorname{ad} X)\phi^{-1} \quad \text{für alle } X \in \mathfrak{g} \text{ und } \phi \in \operatorname{Aut}\mathfrak{g}.$$

Daher ist X genau dann nilpotent, wenn $\phi(X)$ für alle $\phi \in \operatorname{Aut}\mathfrak{g}$ nilpotent ist. In der Situation von Definition 4.4 ergibt sich deshalb, dass der Orbit eines Elementes $X \in \mathfrak{g}$ genau dann nilpotent ist, wenn X nilpotent ist.

4.1.3 Zusammenspiel von $\mathfrak{sl}_2$-Tripeln und nilpotenten Orbiten

Wir beginnen nun, ein Licht auf den Zusammenhang zwischen $\mathfrak{sl}_2$-Tripeln und nilpotenten Orbiten in halbeinfachen Lie-Algebren zu werfen. Hierfür stellen wir zunächst fest, dass jedes $\mathfrak{sl}_2$-Tripel mit nilpotenten Elementen einherkommt.

Lemma 4.6. *Es sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Lie-Algebra und (E, H, F) ein $\mathfrak{sl}_2$-Tripel in $\mathfrak{g}$. Dann ist H halbeinfach, und E und F sind nilpotent.*

Beweis. Es gibt einen Homomorphismus $\varphi\colon \mathfrak{sl}_2(k) \to \mathfrak{g}$ mit $E = \varphi(e)$, $H = \varphi(h)$ und $F = \varphi(f)$. Es ist h ein halbeinfaches Element von $\mathfrak{sl}_2(k)$, und e und f sind nilpotent. Damit folgt die Aussage durch die Funktorialität der Jordanzerlegung. $\square$

Ist (E, H, F) ein $\mathfrak{sl}_2$-Tripel in $\mathfrak{g}$ und $\phi \in \operatorname{Aut} \mathfrak{g}$, so ist auch $(\phi(E), \phi(H), \phi(F))$ ein $\mathfrak{sl}_2$-Tripel in $\mathfrak{g}$. Ist G eine Gruppe, die per Lie-Algebra-Homomorphismen auf einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ wirkt, so induziert die Wirkung von G auf $\mathfrak{g}$ eine Wirkung von G auf Menge der $\mathfrak{sl}_2$-Tripel in $\mathfrak{g}$ via

$$s \cdot (E, H, F) = (s \cdot E, s \cdot H, s \cdot F)$$

für jedes $\mathfrak{sl}_2$-Tripel (E, H, F) in $\mathfrak{g}$ und alle $s \in G$. Damit ergibt sich auch für die $\mathfrak{sl}_2$-Tripel in $\mathfrak{g}$ ein Begriff von Konjugationsklassen.

Definition 4.7. Es sei G eine Gruppe, die per Lie-Algebra-Automorphismen auf einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ wirkt. Für $T \in \Delta(\mathfrak{g})$

$$\mathcal{O}_T \coloneqq G \cdot T = \{s \cdot T\}$$

den *Orbit* von T unter G, wobei

$$s \cdot (E, H, F) = (s \cdot E, s \cdot H, s \cdot F) \quad \text{für alle } (E, H, F) \in \Delta(\mathfrak{g}) \text{ und } s \in G.$$

Ist $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Lie-Algebra, so ist die Abbildung

$$\Delta(\mathfrak{g}) \to \{E \in \mathfrak{g} \mid E \text{ ist nilpotent}\}, (E, H, F) \mapsto E$$

nach Lemma 4.6 wohldefiniert. Im Folgenden zeigen wir, dass sie surjektiv ist, und eine Bijektion

$$\Delta(\mathfrak{g})/G \to \mathcal{N}(\mathfrak{g}, G), \mathcal{O}_{(E,H,F)} \mapsto \mathcal{O}_E$$

induziert.

4.2 Existenz von $\mathfrak{sl}_2$-Tripeln

Wir kommen nun auf die Frage zurück, welche Elemente einer halbeinfachen Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ sich als Teil eines $\mathfrak{sl}_2$-Tripels darstellen lassen. Eine Antwort liefert der Satz von Jacobson-Morozov, nach dem sich jedes nilpotente Element $E \in \mathfrak{g}$ als Teil eines $\mathfrak{sl}_2$-Tripels (E, H, F) ergibt.

Lemma 4.8. *Ist* $\mathfrak{g}$ *eine Lie-Algebra und* $X \in \mathfrak{g}$ ad*-nilpotent, so ist* $\kappa(X, \mathfrak{g}^X) = 0$.

Beweis. Ist $Y \in \mathfrak{g}^X$, so ist $\operatorname{ad} X$ nilpotent und kommutiert mit $\operatorname{ad} Y$. Deshalb ist auch $\operatorname{ad} X \operatorname{ad} Y$ nilpotent, und somit $\kappa(X, Y) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad} X \operatorname{ad} Y) = 0$. □

Definition 4.9. Für eine Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ und einen Untervektorraum $U \subseteq \mathfrak{g}$ bezeichnet

$$U^\perp := \{Y \in \mathfrak{g} \mid \kappa(X, Y) = 0 \text{ für alle } X \in U\}$$

das *orthogonale Komplement* von U bezüglich der Killing-Form.

Lemma 4.10. *Ist* $\mathfrak{g}$ *eine halbeinfache Lie-Algebra und* $X \in \mathfrak{g}$*, so ist*

$$(\mathfrak{g}^X)^\perp = [X, \mathfrak{g}].$$

Beweis. Die Killing-Form κ ist nicht-entartet, da $\mathfrak{g}$ halbeinfach ist. Die Aussage ist deshalb äquivalent zu $\mathfrak{g}^X = [X, \mathfrak{g}]^\perp$, und da κ assoziativ und nicht-entartet ist, folgt für alle $Y \in \mathfrak{g}$

$$\begin{aligned} Y \in [X, \mathfrak{g}]^\perp &\Leftrightarrow \kappa(Y, [X, Z]) = 0 \text{ für alle } Z \in \mathfrak{g} \\ &\Leftrightarrow \kappa([Y, X], Z) = 0 \text{ für alle } Z \in \mathfrak{g} \Leftrightarrow [Y, X] = 0. \end{aligned}$$ □

Theorem 4.11 (Jacobson-Morozov)**.** *Es sei* g *eine halbeinfache Lie-Algebra und* $E \in \mathfrak{g}$ *nilpotent. Dann gibt es* $H, F \in \mathfrak{g}$*, so dass* (E, H, F) *ein* $\mathfrak{sl}_2$*-Tripel ist.*

Beweis. Wir können o.B.d.A. davon ausgehen, dass E in keiner halbeinfachen, echten Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ enthalten ist. Im Folgenden bezeichne κ die Killing-Form von $\mathfrak{g}$.

Nach Lemmata 4.8 und 4.10 ist $E \in (\mathfrak{g}^E)^\perp = [\mathfrak{g}, E]$. Deshalb gibt es $H \in \mathfrak{g}$ mit $[H, E] = 2E$. Wir können o.B.d.A. davon ausgehen, dass H halbeinfach ist. Ist nämlich $H = H_s + H_n$ die Jordanzerlegung von H, so ist kE invariant unter $\operatorname{ad} H$, und damit auch unter $(\operatorname{ad} H)_n = \operatorname{ad} H_n$. Da $\operatorname{ad} H_n$ nilpotent auf $\mathfrak{g}$ wirkt, und damit auch auf dem eindimensionalen Unterraum kE, gilt dann bereits $[H_n, E] = (\operatorname{ad} H_n)(E) = 0$, und somit $[H_s, E] = [H, E] = 2E$.

Behauptung. Es ist $H \in [\mathfrak{g}, E]$.

Beweis. Nach Lemma 4.10 gilt zu zeigen, dass $H \in (\mathfrak{g}^E)^\perp$, dass also $\kappa(H, \mathfrak{g}^E) = 0$. Nach der Jacobi-Identität ist $\mathfrak{g}^E$ invariant unter $(\operatorname{ad} H)$, denn für $X \in \mathfrak{g}^E$ ist $[E, X] = 0$ und somit

$$[E, [H, X]] = [[E, H], X] + [H, [E, X]] = -2[E, X] + [H, [E, X]] = 0.$$

Da $\operatorname{ad} H$ halbeinfach ist, zerlegt sich $\mathfrak{g}^E$ in $(\operatorname{ad} H)$-Eigenräume $\mathfrak{g}^E = \bigoplus_{\lambda \in k} \mathfrak{g}^E_\lambda$, wobei

$$\kappa\left(H, \bigoplus_{\lambda \neq 0} \mathfrak{g}^E_\lambda\right) = \kappa(H, [H, \mathfrak{g}]) = \kappa([H, H], \mathfrak{g}) = 0.$$

Es sei $X \in \mathfrak{g}^E_0 = (\mathfrak{g}^E)^H = \mathfrak{g}^E \cap \mathfrak{g}^H$. Ist X nilpotent, so ist wegen $X \in (\mathfrak{g}^E)^H \subseteq \mathfrak{g}^H$ auch $H \in \mathfrak{g}^X$ und damit $\kappa(H, X) = 0$ nach Lemma 4.10.

Angenommen, es gibt $X \in \mathfrak{g}_0^E$ mit $X_s \neq 0$. Da ein Element aus $\mathfrak{g}$ genau dann mit X kommutiert, wenn es mit X_s und X_n kommutiert, folgt aus $X \in \mathfrak{g}^E \cap \mathfrak{g}^H$, dass auch $X_s \in \mathfrak{g}^E \cap \mathfrak{g}^H$ und somit $E, H \in \mathfrak{g}^{X_s}$. Insbesondere ist $E = [H, E]/2 \in [\mathfrak{g}^{X_s}, \mathfrak{g}^{X_s}]$. Da X_s halbeinfach ist, folgt aus Proposition 2.14, dass $\mathfrak{g}^{Z_s}$ reduktiv ist, und somit $[\mathfrak{g}^{X_s}, \mathfrak{g}^{X_s}]$ halbeinfach. Da $X_s \neq 0$ und $Z(\mathfrak{g}) = 0$ ist $\mathfrak{g}^{X_s}$ eine echte Unteralgebra von $\mathfrak{g}$, und somit auch $[\mathfrak{g}^{X_s}, \mathfrak{g}^{X_s}]$. Dass $E \in [\mathfrak{g}^{X_s}, \mathfrak{g}^{X_s}]$ widerspricht daher der Annahme, dass E in keiner echten halbeinfachen Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ enthalten ist.

Es gibt also kein $X \in \mathfrak{g}_0^E$ mit $X_s \neq 0$. Somit besteht $\mathfrak{g}^E$ aus nilpotenten Elementen, weshalb auch $\kappa(H, \mathfrak{g}_0^E) = 0$ und somit insgesamt $\kappa(H, \mathfrak{g}^E) = 0$. □

Es fehlt noch ein $F \in \mathfrak{g}$ mit $[H, F] = -2F$ und $[E, F] = H$. Da H halbeinfach ist, zerlegt sich $\mathfrak{g}$ in $(\operatorname{ad} H)$-Eigenräume $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\lambda \in k} \mathfrak{g}_\lambda$, und da $E \in \mathfrak{g}_2$ ist $[E, \mathfrak{g}_\lambda] \subseteq \mathfrak{g}_{\lambda+2}$ für alle $\lambda \in k$. Nach der vorherigen Behauptung gibt es $F' \in \mathfrak{g}$ mit $[E, F'] = H$, und für $F' = \sum_{\lambda \in k} F'_\lambda$ bezüglich $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\lambda \in k} \mathfrak{g}_\lambda$ ist

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}^H \ni H = [E, F'] = \sum_{\lambda \in k} \underbrace{[E, F'_\lambda]}_{\in \mathfrak{g}_{\lambda+2}}.$$

Wegen der Direktheit der Zerlegung $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\lambda \in k} \mathfrak{g}_\lambda$ ist deshalb $[E, F_{-2}] = H$. Da auch $[H, F_{-2}] = -2F$ lässt sich $F := F_{-2}$ wählen. □

4.3 Eindeutigkeit von $\mathfrak{sl}_2$-Tripeln nach Kostant

Nach Jacobson-Morozov lässt sich jedes nilpotente Element einer halbeinfachen Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ zu einem $\mathfrak{sl}_2$-Tripel in $\mathfrak{g}$ erweitern. Mit einem Satz von Kostant zeigen wir, dass dieses Tripel, in gewissem Sinne, bis auf Konjugation eindeutig ist. Hieraus folgt dann eine Bijektion zwischen den nilpotenten Orbiten $\mathcal{N}(\mathfrak{g}, G)$ und Konjugationsklassen von $\mathfrak{sl}_2$-Tripeln $\Delta(\mathfrak{g})/G$.

Wir fixieren in diesem Abschnitt eine halbeinfache Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ und eine Gruppe G, die per Lie-Algebra-Automorphismen auf $\mathfrak{g}$ wirkt, so dass es für jedes $\sigma \in \operatorname{Int} \mathfrak{g}$ ein $s \in G$ gibt, das per σ auf $\mathfrak{g}$ wirkt.

Definition 4.12. Für nilpotentes $E \in \mathfrak{g}$ sei $\mathfrak{u}^E := \mathfrak{g}^E \cap [E, \mathfrak{g}]$.

Proposition 4.13. *$E \in \mathfrak{g}$ sei nilpotent (E, H, F) ein $\mathfrak{sl}_2$-Tripel in $\mathfrak{g}$.*

1. *$\mathfrak{g}$ zerlegt sich in $(\operatorname{ad} H)$-Eigenräume $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_i$.*

2. *$\mathfrak{g}^E$ ist $(\operatorname{ad} H)$-invariant und zerlegt sich in $(\operatorname{ad} H)$-Eigenräume $\mathfrak{g}^E = \bigoplus_{i \geq 0} \mathfrak{g}_i^E$ mit $\mathfrak{g}_i^E = \mathfrak{g}^E \cap \mathfrak{g}_i$.*

3. *$\mathfrak{u}^E$ ist ein $(\operatorname{ad} H)$-invariantes Ideal in $\mathfrak{g}^E$ und zerlegt sich in $(\operatorname{ad} H)$-Eigenräume $\mathfrak{u}^E = \bigoplus_{i > 0} \mathfrak{u}_i^E$ mit $u_i^E = \mathfrak{g}_i^E$ für alle $i > 0$.*

4. *$\mathfrak{u}^E$ besteht aus nilpotenten Elementen.*

Beweis. Für $d \geq 1$ sei im Folgenden abkürzend

$$I_d \coloneqq \{-d+1, -d+3, \dots, d-3, d-1\}.$$

Da die Aussage für $\mathfrak{g} = 0$ klar ist, betrachten wir außerdem nur den Fall $\mathfrak{g} \neq 0$.

1. Da $\operatorname{ad} H$ halbeinfach ist, zerlegt sich $\mathfrak{g}$ in $(\operatorname{ad} H)$-Eigenräume $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\lambda \in k} \mathfrak{g}_\lambda$. Das $\mathfrak{sl}_2$-Tripel (E, H, F) entspricht einem Homomorphismus $\phi\colon \mathfrak{sl}_2(k) \to \mathfrak{g}$ mit $\phi(e) = E$, $\phi(h) = H$ und $\phi(f) = F$, und über diesen wird $\mathfrak{g}$ zu einer endlichdimensionalen Darstellung von $\mathfrak{sl}_2(k)$ mit

$$X \cdot Y = (\operatorname{ad} \phi(X))(Y) \quad \text{für alle } X \in \mathfrak{sl}_2(k) \text{ und } Y \in \mathfrak{g}.$$

Insbesondere ist $(\operatorname{ad} H)(Y) = h \cdot Y$ für alle $Y \in \mathfrak{g}$. Aus der Klassifikation der endlichdimensionalen Darstellungen von $\mathfrak{sl}_2(k)$ folgt deshalb, dass alle Eigenwerte von $\operatorname{ad} H$ ganzzahlig sind, also bereits $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_i$.

2. Es sei $\mathfrak{g} = \bigoplus_{d \geq 1} \bigoplus_{j=1}^{\nu_d} W^{d,j}$ eine Zerlegung von $\mathfrak{g}$ in irreduzible Unterdarstellungen $W^{d,j}$ mit $\dim W^{d,j} = d$. Nach der Klassifikation endlichdimensionaler, irreduzibler Darstellungen von $\mathfrak{sl}_2(k)$ zerlegt sich $W^{d,j}$ für alle $d \geq 1$ und $j = 1, \dots, \nu_d$ in eindimensionale $(\operatorname{ad} H)$-Eigenräume

$$W^{d,j} = W^{d,j}_{-d+1} \oplus W^{d,j}_{-d+3} \oplus \dots \oplus W^{d,j}_{d-3} \oplus W^{d,j}_{d-1} = \bigoplus_{i \in I_d} W^{d,j}_i.$$

und hat eine Basis $(b^{d,j}_i)_{i \in I_d}$ mit $b^{d,j}_i \in W^{d,j}_i$ für alle $i \in I_d$, sowie $e \cdot b^{d,j}_i = b^{d,j}_{i+2}$ für $i \in I_d \setminus \{d-1\}$ und $e \cdot b^{d,j}_{d-1} = 0$.
Es ist dann

$$\mathcal{B} \coloneqq \{b^{d,j}_i \mid d \geq 1, j = 1, \dots, \nu_d, i \in I_d\}$$

eine Basis von $\mathfrak{g}$ mit

$$e \cdot b^{d,j}_i = \begin{cases} b^{d,j}_{i+2} & \text{falls } i \in I_d \setminus \{d-1\}, \\ 0 & \text{falls } i = d-1. \end{cases}$$

Für $X \in \mathfrak{g}$ mit $X = \sum_{d \geq 1, j=1,\dots,\nu_d, i \in I_j} a^{d,j}_i b^{d,j}_i$, $a^{d,j}_i \in k$ ist daher

$$[E, X] = e \cdot \sum_{\substack{d \geq 1 \\ j=1,\dots,\nu_d \\ i \in I_d}} a^{d,j}_i b^{d,j}_i = \sum_{\substack{d \geq 1 \\ j=1,\dots,\nu_d \\ i \in I_d \setminus \{d-1\}}} a^{d,j}_i b^{d,j}_{i+2} = \sum_{\substack{d \geq 1 \\ j=1,\dots,\nu_d \\ i \in I_d \setminus \{-d+1\}}} a^{d,j}_{i-2} b^{d,j}_i. \tag{1}$$

Insbesondere ist genau dann $X \in g^E$, wenn $a^{d,j}_i = 0$ für alle $d \geq 1$, $j = 1, \dots, \nu_d$ und $i \in I_d \setminus \{d-1\}$. Daher ist

$$\mathfrak{g}^E = \bigoplus_{d \geq 1} \bigoplus_{j=1}^{\nu_d} W^{d,j}_{d-1}.$$

Also ist $\mathfrak{g}^E$ $(\operatorname{ad} H)$-invariant und die Eigenwerte von $(\operatorname{ad} H)|_{\mathfrak{g}^E}$ sind nicht-negativ. Also ist $\mathfrak{g}^E = \bigoplus_{i\geq 0} \mathfrak{g}_i^E$, wobei $\mathfrak{g}_i^E = \bigoplus_{j=1}^{\nu_{i+1}} W_i^{d,j}$. Dass $\mathfrak{g}_i^E = \mathfrak{g}^E \cap \mathfrak{g}_i$ folgt daraus, dass $\mathfrak{g}^E$ ein $(\operatorname{ad} H)$-invarianter Unterraum von $\mathfrak{g}$ ist.

3. Aus (1) folgt auch, dass

$$[E,\mathfrak{g}] = \bigoplus_{d\geq 1}\bigoplus_{j=1}^{\nu_d} \bigoplus_{\substack{i\in I_d\\ i\neq -d+1}} W_i^{d,j} = \bigoplus_{d\geq 2}\bigoplus_{j=1}^{\nu_d} \bigoplus_{\substack{i\in I_d\\ i\neq -d+1}} W_i^{d,j}.$$

Daher ist

$$\mathfrak{u}^E = \mathfrak{g}^E \cap [E,\mathfrak{g}] = \bigoplus_{d\geq 2}\underbrace{\bigoplus_{j=1}^{\nu_d} W_{d-1}^{d,j}}_{\mathfrak{g}_{d-1}^E} = \bigoplus_{i>0} \mathfrak{g}_i^E.$$

Insbesondere ist $\mathfrak{u}^E$ ebenfalls $(\operatorname{ad} H)$-invariant. Da $[\mathfrak{g}_i^E, \mathfrak{g}_j^E] \subseteq \mathfrak{g}_{i+j}^E$ für alle $i,j\in\mathbb{Z}$ folgt außerdem, dass $\mathfrak{u}^E = \bigoplus_{i>0}\mathfrak{g}_i^E$ ein Ideal in $\mathfrak{g}^E = \bigoplus_{i\geq 0}\mathfrak{g}_i^E$ ist.

4. Im Folgenden bezeichnet ad stets $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}$.

Es sei $X \in \mathfrak{u}^E$ mit $X = \sum_{i>0} X_i$ bezüglich $\mathfrak{u}^E = \bigoplus_{i>0}\mathfrak{g}_i^E \subseteq \bigoplus_{i>0}\mathfrak{g}_i$. Es gilt zu zeigen, dass X ad-nilpotent ist. Nach Lemma 1.19 ist $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subseteq \mathfrak{g}_{i+j}$ für alle $i,j\in\mathbb{Z}$. Aus der Endlichdimensionalität von $\mathfrak{g}\neq 0$ ergibt sich die Wohldefiniertheit von $m := \max\{i\in\mathbb{Z} \mid \mathfrak{g}_i \neq 0\}$. Per absteigender Induktion über $i \in \mathbb{Z}_{\leq m}$ ergibt sich, dass $(\operatorname{ad} X)^{m+1-i}(\bigoplus_{j=i}^m \mathfrak{g}_j) = 0$.

Für $Y\in\mathfrak{g}_m$ ist

$$(\operatorname{ad} X)(Y) = [X,Y] = \sum_{i>0}\underbrace{[X_i,Y]}_{\in\mathfrak{g}_{i+m}},$$

und da $\mathfrak{g}_{i+m} = 0$ für alle $i>0$ folgt somit $(\operatorname{ad} X)(Y) = 0$.

Es sei nun $i\in\mathbb{Z}_{<m}$ mit $(\operatorname{ad} X)^{m-i}(\bigoplus_{j=i+1}^m \mathfrak{g}_j) = 0$. Für $Y = \sum_{j=i}^m Y_i \in \bigoplus_{j=i}^m \mathfrak{g}_j$ ist

$$(\operatorname{ad} X)(Y) = [X,Y] = \sum_{i>0}\sum_{j=i}^{m}\underbrace{[X_i,Y_j]}_{\in\mathfrak{g}_{i+j}} \subseteq \bigoplus_{j=i+1}^{m}\mathfrak{g}_j,$$

also $(\operatorname{ad} X)^{m+1-i}(\bigoplus_{j=i}^m \mathfrak{g}_j) = 0$.

Da $\dim\mathfrak{g}_i = \dim\mathfrak{g}_{-i}$ für alle $i\in\mathbb{Z}$ ist somit $\dim\mathfrak{g}_i = 0$ für $i < -m$, und somit $(\operatorname{ad} X)^{2m+1}(\mathfrak{g}) = 0$. $\square$

Korollar 4.14. *Sind (E,H,F) und (E,H,F') zwei $\mathfrak{sl}_2$-Tripel in $\mathfrak{g}$, so ist $F = F'$.*

Beweis. Nach Proposition 4.13 zerlegt sich $\mathfrak{g}$ in $(\operatorname{ad} H)$-Eigenräume $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}\mathfrak{g}_i$. Es ist

$$[E, F-F'] = [E,F] - [E,F'] = H - H = 0,$$

also $F - F' \in \mathfrak{g}^E$. Andererseits sind auch $F, F' \in \mathfrak{g}_{-2}$ und somit $F - F' \in \mathfrak{g}_{-2}$. Nach Proposition 4.13 ist $\mathfrak{g}^E \cap \mathfrak{g}_{-2} = \mathfrak{g}_{-2}^E = 0$, also $F - F' = 0$. $\square$

Bemerkung 4.15. Die Aussage gilt auch für reduktive Lie-Algebren, da nach Korollar 4.3 die $\mathfrak{sl}_2$-Tripel in einer reduktiven Lie-Algebra mit denen der unterliegenden halbeinfachen Lie-Algebra übereinstimmen.

Mithilfe von Proposition 4.13 erhalten wir außerdem das folgende Lemma, aus dem wir schließlich den Satz von Kostant erhalten werden.

Lemma 4.16. *Es sei $E \in \mathfrak{g}$ nilpotent und (E, H, F) ein $\mathfrak{sl}_2$-Tripel in $\mathfrak{g}$. Ist $V \in \mathfrak{u}^E$, so gibt es $Z \in \mathfrak{u}^E$ mit $\exp(\operatorname{ad} Z)(H) = H + V$.*

Beweis. Für $\mathfrak{g} = 0$ ist die Aussage klar; wir betrachten daher nur den Fall $\mathfrak{g} \neq 0$.

Nach Proposition 4.13 zerlegt sich $\mathfrak{g}^E$ in $(\operatorname{ad} H)$-Eigenräume $\mathfrak{g}^E = \bigoplus_{i \geq 0} \mathfrak{g}_i^E$ und es ist $\mathfrak{u}^E = \bigoplus_{i>0} \mathfrak{g}_i^E$ ein Ideal in $\mathfrak{g}^E$. Da $\mathfrak{g} \neq 0$ endlichdimensional ist, und nach $\mathfrak{sl}_2$-Theorie auch $\dim \mathfrak{g}_i = \dim \mathfrak{g}_{-i}$ für alle $i \in \mathbb{Z}$, ist auch $\mathfrak{g}^E \neq 0$ endlichdimensional, $m \coloneqq \max\{i \geq 0 \mid \mathfrak{g}_i^E \neq 0\}$ wohldefiniert. Es gelte die Zerlegung $V = \sum_{i=1}^m V_i$ bezüglich $\mathfrak{u}^E = \bigoplus_{i=1}^m \mathfrak{g}_i^E$. Im Folgenden werden iterativ $Z_0, Z_1, \dots, Z_m \in \mathfrak{u}^E$ konstruiert, so dass für alle $j = 0, 1, \dots, m$

1. $Z_j \in \bigoplus_{i=1}^j \mathfrak{g}_i^E$ und
2. $\exp(\operatorname{ad} Z_j)(H) - (H + V) \in \bigoplus_{i=j+1}^m \mathfrak{g}_i^E$.

Das gesuchte Z ergibt sich dann als $Z = Z_m$. Dabei beginnen wir notwendigerweise mit $Z_0 = 0$, was die gewünschten Eigenschaften erfüllt.

Es sei nun $0 \leq j < m$ und $Z_j \in \bigoplus_{i=1}^j \mathfrak{g}_i^E$ mit $\exp(\operatorname{ad} Z_j)(H) - (H+V) \in \bigoplus_{i=j+1}^m \mathfrak{g}_i^E$. Dann sei Z'_{j+1} der Summand von $\exp(\operatorname{ad} Z_j)(H) - (H + V)$ in $\mathfrak{g}_{j+1}^E$ und

$$Z_{j+1} \coloneqq Z_j + \frac{1}{j+1} Z'_{j+1} \in \bigoplus_{1 \leq i \leq j+1} \mathfrak{g}_i^E.$$

Es ist

$$[Z_{j+1}, H] = [Z_j, H] + \frac{1}{j+1} [Z'_{j+1}, H] = [Z_j, H] - Z'_{j+1}.$$

Für $n \geq 2$ ist

$$(\operatorname{ad} Z_{j+1})^n(H) = \sum_{\substack{i=1,\dots,n \\ X_i \in \{Z_j, Z'_{j+1}/(j+1)\}}} [X_1, [X_2, \dots [X_{n-1}, [X_n, H]]]]$$

Für $X_1 = \dots = X_n = Z_j$ ergibt sich der Summand $(\operatorname{ad} Z_j)^n(H)$. Andernfalls gibt es mindestens ein $1 \leq i \leq n$ mit $X_i = Z'_{j+1}$. Da $Z'_{j+1} \in \mathfrak{g}_{j+1}$, $Z_j \in \bigoplus_{i>0} \mathfrak{g}_i$ und $H \in \mathfrak{g}_0$ ist deshalb jeder andere Summand in $\bigoplus_{i>j+1} \mathfrak{g}_i$. Da $\mathfrak{u}^E$ ein Ideal in $\mathfrak{g}^E$ ist, liegen sie bereits in $\bigoplus_{i>j+1}\mathfrak{g}_i^E = \bigoplus_{i=j+2}^m \mathfrak{g}_i^E$. Für passendes $R \in \bigoplus_{i=j+2}^m \mathfrak{g}_i^E$ ist deshalb

$$\begin{aligned}
&\exp(\operatorname{ad} Z_{j+1}) - (H+V) \\
&= \sum_{n=0}^m \frac{(\operatorname{ad} Z_{j+1})^n}{n!}(H) - (H+V) \\
&= H + [Z_j, H] - Z'_{j+1} + \sum_{i=2}^m \frac{(\operatorname{ad} Z_{j+1})^n}{n!}(H) - (H+V) \\
&= -Z'_{j+1} + \underbrace{H + (\operatorname{ad} Z_j)(H) + \sum_{i=2}^m \frac{(\operatorname{ad} Z_j)^n}{n!}(H)}_{=\exp(\operatorname{ad} Z_j)(H)} + R - (H+V) \\
&= R + \underbrace{\exp(\operatorname{ad} Z_j)(H) - (H+V) - Z'_{j+1}}_{\in \bigoplus_{i=j+2}^m \mathfrak{g}_i^E} \in \bigoplus_{i=j+2}^m \mathfrak{g}_i^E.
\end{aligned}$$

□

Theorem 4.17 (Kostant)**.** *$E \in \mathfrak{g}$ sei nilpotent und (E,H,F) und (E,H',F') seien zwei $\mathfrak{sl}_2$-Tripel in $\mathfrak{g}$. Dann gibt es $X \in \mathfrak{u}^E$, so dass für $\sigma := \exp(\operatorname{ad} X) \in \operatorname{Int}\mathfrak{g}$*

$$\sigma(E) = E, \quad \sigma(H) = H', \quad \sigma(F) = F'.$$

Beweis. Da $[H'-H, E] = 2E - 2E = 0$ ist $H' - H \in \mathfrak{g}^E$. Da auch $[E, F'-F] = H' - H$ ist sogar $H' - H \in \mathfrak{g}^E \cap [E,\mathfrak{g}] = \mathfrak{u}^E$. Es gibt daher $X \in \mathfrak{u}^E$, so dass für $\sigma = \exp(\operatorname{ad} X)$

$$\sigma(H) = \exp(\operatorname{ad} X)(H) = H + (H' - H) = H'.$$

Da $X \in \mathfrak{u}^E \subseteq \mathfrak{g}^E$ ist außerdem $\sigma(E) = \exp(\operatorname{ad} X)(E) = E$. Da $\sigma \in \operatorname{Aut}\mathfrak{g}$ ist auch $(\sigma(E),\sigma(H),\sigma(F)) = (E, H', \sigma(F))$ ein $\mathfrak{sl}_2$-Tripel in $\mathfrak{g}$, weshalb nach Korollar 4.14 auch $\sigma(F) = F'$. □

Mithilfe des Satz' von Kostant ergibt sich nun die versprochene Klassifikation nilpotenter Orbiten.

Korollar 4.18 (Klassifikation nilpotenter Orbiten)**.** *Es sei $\mathfrak{g}$ eine reduktive Lie-Algebra und G eine Gruppe, die durch Lie-Algebra-Automorphismen auf $\mathfrak{g}$ wirkt, so dass es für jedes $\sigma \in \operatorname{Int}\mathfrak{g}$ ein $s \in G$ gibt, dass durch σ auf $\mathfrak{g}$ wirkt. Dann ist die Abbildung*

$$\Omega\colon \Delta(\mathfrak{g})/G \to \mathcal{N}(\mathfrak{g}, G), \mathcal{O}_{(E,H,F)} \to \mathcal{O}_E$$

eine wohldefinierte Bijektion zwischen den Konjugationsklassen von $\mathfrak{sl}_2$-Tripeln und nilpotenten Orbiten.

Beweis. Nach Bemerkung 4.5 genügt es die Aussage für halbeinfache Lie-Algebren zu zeigen. Die Abbildung

$$\Delta(\mathfrak{g}) \to \{E \in \mathfrak{g} \mid E \text{ ist nilpotent}\}$$

ist nach Lemma 4.6 wohldefiniert und nach Theorem 4.11 surjektiv, und setzt sich somit zu einer wohldefinierten Surjektion

$$\tilde{\Omega}\colon \Delta(\mathfrak{g}) \to \mathcal{N}(\mathfrak{g}, G), (E, H, F) \to \mathcal{O}_E$$

fort. Sind $(E, H, F), (E', H', F') \in \Delta(\mathfrak{g})$ konjugiert unter G, so gibt es $t \in G$ mit $t \cdot (E, H, F) = (E', H', F')$. Dann ist insbesondere $t \cdot E = E'$ und somit $\mathcal{O}_E = \mathcal{O}_{E'}$. Das zeigt, dass $\tilde{\Omega}$ über eine wohldefinierte Surjektion

$$\Omega\colon \Delta(\mathfrak{g})/G \to \mathcal{N}(\mathfrak{g}, G), \mathcal{O}_{(E,H,F)} \to \mathcal{O}_E$$

faktorisiert. Sind $\mathcal{O}_{(E,H,F)}, \mathcal{O}_{(E',H',F')} \in \Delta(\mathfrak{g})/G$ mit $\mathcal{O}_E = \mathcal{O}_{E'}$, so gibt es $t \in G$ mit $t \cdot E = E'$. Dann sind (E', H', F') und $t \cdot (E, H, F) = (E', t \cdot H, t \cdot F)$ zwei $\mathfrak{sl}_2$-Tripel in $\mathfrak{g}$, weshalb es nach Theorem 4.17 einen inneren Automorphismus $\sigma \in \operatorname{Int}\mathfrak{g}$ mit $\sigma(E') = E'$, $\sigma(t \cdot H) = H'$ und $\sigma(t \cdot F) = F'$ gibt. Nach Annahme gibt es ein $s \in H$, das durch σ auf $\mathfrak{g}$ wirkt. Für $s \cdot t \in G$ ist daher

$$s \cdot t \cdot (E, H, F) = s \cdot (E', t \cdot H, t \cdot F) = (E', \sigma(t \cdot H), \sigma(t \cdot F)) = (E', H', F').$$

Also ist bereits $\mathcal{O}_{(E,H,F)} = \mathcal{O}_{(E',H',F')}$, was die Injektivität von Ω zeigt. □

4.4 Nilpotente Orbiten in $\mathfrak{gl}_n(k)$

Als Anwendung der in diesem Kapitel entwickelten Theorie bestimmen wir in diesem Abschnitt die nilpotenten Orbiten in $\mathfrak{gl}_n(k)$ unter der Konjugationswirkung von $\mathrm{GL}_n(k)$. Hierfür bedienen wir uns erneut der Darstellungstheorie von $\mathfrak{sl}_2(k)$.

4.4.1 Bijektionen zu Isomorphieklassen von $\mathfrak{sl}$-Modulstrukturen

Zunächst sei V ein n-dimensionaler Vektorraum und $\mathfrak{g}$ eine beliebige Lie-Algebra. Eine Darstellung von $\mathfrak{g}$ mit V als unterliegenden Vektorraum ist per Definition ein Homomorphismus $\rho\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$, und wir schreiben im Folgenden

$$\operatorname{Hom}_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{gl}(V)) := \{\rho\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V) \mid \rho \text{ ist ein Homomorphismus}\}.$$

Wir nutzen im Folgenden die in Kapitel 1 erläuterte Korrespondenz zwischen Darstellungen von $\mathfrak{g}$ mit unterliegenden Vektorraum V und $\mathfrak{g}$-Modulstrukturen auf V, um diese Begriffe synonym zu verwenden. Dabei notieren wir eine $\mathfrak{g}$-Modulstruktur als eine bilineare Abbildung $\mathfrak{g} \times V \to V, (X, v) \mapsto X \cdot v$. Gegebenenfalls betrachten wir den unterliegenden Vektorraum V ebenfalls als ein Teil der $\mathfrak{g}$-Modulstruktur.

Die Gruppe $\mathrm{GL}(V)$ wirkt durch Konjugation auf $\mathfrak{gl}(V)$, und für alle $\alpha \in \mathrm{GL}(V)$ schreiben wir

$$c_\alpha\colon \mathfrak{gl}(V) \to \mathfrak{gl}(V), X \mapsto \alpha \circ X \circ \alpha^{-1} \quad \text{für alle } X \in \mathfrak{gl}(V).$$

Damit wirkt $\mathrm{GL}(V)$ auch auf $\operatorname{Hom}_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{gl}(V))$ durch

$$\alpha \cdot \rho = c_\alpha \circ \rho \quad \text{für alle } \alpha \in \mathrm{GL}(\mathfrak{g}) \text{ und } \rho \in \operatorname{Hom}_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{gl}(V)).$$

Dass dabei $c_\alpha \circ \rho$ ein Homomorphismus ist, folgt daraus, dass c_α ein Automorphismus von Lie-Algebren ist. Dass die Bedingungen einer Gruppenwirkung erfüllt sind, ergibt sich daraus, dass die Abbildung $\mathrm{GL}(V) \to \mathrm{Aut}\,\mathfrak{gl}(V), \alpha \mapsto c_\alpha$ ein Gruppenhomomorphismus ist.

Beschreiben $\rho, \rho' \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ zwei $\mathfrak{g}$-Modulstrukturen auf V, so ist eine lineare Abbildung $\alpha \colon V \to V$ genau dann dann ein Homomorphismus von Darstellungen von ρ nach ρ', wenn $\alpha \circ \rho(X) = \rho'(X) \circ \alpha$ für alle $X \in \mathfrak{g}$. Für $\alpha \in \mathrm{GL}(V)$ ist dies äquivalent dazu, dass $\rho'(X) = \alpha \circ \rho(X) \circ \alpha^{-1}$ für alle $X \in \mathfrak{g}$, also $\rho' = c_\alpha \cdot \rho$. Dass ρ und ρ' isomorphe Darstellungen (mit gleichen unterliegenden Vektorraum V) beschreiben, ist daher äquivalent dazu, dass es ein $\alpha \in \mathrm{GL}(V)$ mit $\rho' = \alpha\rho\alpha^{-1}$ gibt. Daher induziert die Bijektion zwischen $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{gl}(V))$ und den $\mathfrak{g}$-Modulstrukturen auf V eine Bijektion

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{gl}(V))/\,\mathrm{GL}(V) &\xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{matrix} \text{Isomorphieklassen von } \mathfrak{g}\text{-} \\ \text{Modulstrukturen auf } V \end{matrix} \right\}, \\ [\rho] &\longmapsto [\mathfrak{g} \times V \to V, (X, v) \mapsto \rho(X)(v)]\end{aligned}$$

Wir betrachten nun die Lie-Algebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(k)$ und den Vektorraum $V = k^n$. Wir identifizieren $\mathfrak{gl}(k^n)$ mit $\mathfrak{gl}_n(k)$ und $\mathrm{GL}(k^n)$ mit $\mathrm{GL}_n(k)$, so dass die jeweiligen Wirkungen auf k^n der gewöhnliche Multiplikation entsprechen. Dann ergibt sich eine Bijektion

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{sl}_2(k), \mathfrak{gl}_n(k))/\mathrm{GL}_n(k) &\xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{matrix} \text{Isomorphieklassen von } \mathfrak{sl}_2(k)\text{-} \\ \text{Modulstrukturen auf } k^n \end{matrix} \right\}, \\ [\phi] &\longmapsto [\mathfrak{sl}_2(k) \times k^n \to k^n, (X, v) \mapsto \phi(X)v].\end{aligned}$$

Aus der Bijektion von Lemma 4.2 ergibt sich nun außerdem eine Bijektion

$$\begin{aligned}\Delta(\mathfrak{gl}_n(k))/\mathrm{GL}_n(k) &\to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{sl}_2(k), \mathfrak{gl}_n(k))/\mathrm{GL}_n(k) \\ \mathcal{O}_T &\mapsto [\phi_T],\end{aligned}$$

wobei $\phi_T(e) = E$, $\phi_T(h) = H$ und $\phi_T(f) = F$ für $T = (E, H, F)$. Nach der Klassifikation nilpotenter Orbiten aus Korollar 4.18 gibt es außerdem eine Bijektion

$$\begin{aligned}\Delta(\mathfrak{gl}_n(k))/\mathrm{GL}_n(k) &\xrightarrow{\sim} \mathcal{N}(\mathfrak{gl}_n(k), \mathrm{GL}_n(k)), \\ \mathcal{O}_{(E,H,F)} &\longmapsto \mathcal{O}_E.\end{aligned}$$

Insgesamt haben wir damit die Bijektionen

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(\mathfrak{gl}_n(k), \mathrm{GL}_n(k)) &\xleftrightarrow{\sim} \Delta(\mathfrak{gl}_n(k))/\mathrm{GL}_n(k) \\ &\xleftrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{sl}_2(k), \mathfrak{gl}_n(k))/\mathrm{GL}_n(k) \\ &\xleftrightarrow{\sim} \left\{ \begin{matrix} \text{Isomorphieklassen von } \mathfrak{sl}_2(k)\text{-} \\ \text{Modulstrukturen auf } k^n \end{matrix} \right\}.\end{aligned} \tag{2}$$

Es gilt also, die Isomorphieklassen von $\mathfrak{sl}_2(k)$-Modulstrukturen auf k^n zu verstehen.

4.4.2 Bestimmung der Isomorphieklassen von $\mathfrak{sl}_2$-Modulstrukturen auf k^n

Definition 4.19. Eine Partition von $n \geq 1$ ist ein Tupel $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ mit $\lambda_i \in \mathbb{N}$ für alle $i = 1, \ldots, n$, sowie $\sum_{m=1}^{n} m\lambda_m = n$. Die Menge der Partitionen von n wird mit

$$\mathrm{Par}(n) \coloneqq \left\{ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{N}^n \;\middle|\; \sum_{m=1}^{n} m\lambda_m = n \right\}.$$

bezeichnet.

Beispiel 4.20. Die Partitionen von 5 sind $(5,0,0,0,0)$, $(3,1,0,0,0)$, $(1,2,0,0,0)$, $(2,0,1,0,0)$, $(0,1,1,0,0)$, $(1,0,0,1,0)$ und $(0,0,0,0,1)$. Sie entsprechen, in gleicher Reihenfolge, den Zerlegungen

$$1+1+1+1+1 = 1+1+1+2 = 1+2+2 = 1+1+3 = 2+3 = 1+4 = 5.$$

Für jede Partition $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathrm{Par}(n)$ ergibt sich eine $\mathfrak{sl}_2$-Modulstruktur auf k^n wie folgt: Da $\sum_{m=1}^{n} m\lambda_m = n = \dim k^n$ können wir die Standardbasis von k^n wie folgt umbenennen:

$$\begin{gathered} b_0^{1,1},\; b_0^{1,2},\; \ldots,\; b_0^{1,\lambda_1}, \\ b_{-1}^{2,1}, b_1^{2,1},\; b_{-1}^{2,2}, b_1^{2,2},\; \ldots,\; b_{-1}^{2,\lambda_2},, b_1^{2,\lambda_2}, \\ b_{-2}^{3,1}, b_0^{3,1}, b_2^{3,1},\; b_{-2}^{3,2}, b_0^{3,2}, b_2^{3,2},\; \ldots,\; b_{-2}^{3,\lambda_3}, b_0^{3,\lambda_3}, b_2^{3,\lambda_3} \end{gathered}$$

bis schließlich

$$\begin{gathered} b_{-n+2}^{n-1,1}, \ldots, b_{n-2}^{n-2,1},\; b_{-n+2}^{n-2,2}, \ldots, b_{n-2}^{n-2,2},\; \ldots,\; b_{-n+2}^{n-2,\lambda_n}, \ldots, b_{n-2}^{n-2,\lambda_n} \\ b_{-n+1}^{n,1}, \ldots, b_{n-1}^{n,1},\; b_{-n+1}^{n,2}, \ldots, b_{n-1}^{n,2},\; \ldots,\; b_{-n+1}^{n,\lambda_n}, \ldots, b_{n-1}^{n,\lambda_n}. \end{gathered}$$

Beispiel 4.21. Für die Partition $(3,1,2,0,1) \in \mathrm{Par}(16)$ benennen wir die Standardbasis $(e_1, \ldots, e_{16})$ von k^{16} in

$$\begin{gathered} b_0^{1,1} = e_1,\; b_0^{1,2} = e_2,\; b_0^{1,3} = e_3, \\ b_{-1}^{2,1} = e_4, b_1^{2,1} = e_5, \\ b_{-2}^{3,1} = e_6, b_0^{3,1} = e_7, b_2^{3,1} = e_8,\; b_{-2}^{3,1} = e_9, b_0^{3,1} = e_{10}, b_2^{3,1} = e_{11}, \\ b_{-4}^{5,1} = e_{12}, b_{-2}^{5,1} = e_{13}, b_0^{5,1} = e_{14}, b_2^{5,1} = e_{15}, b_4^{5,1} = e_{16} \end{gathered}$$

um.

Für alle $d = 1, \ldots n$ und $j = 1, \ldots, \lambda_d$ seien dann

$$W^{d,j} \coloneqq kb_{-d+1}^{d,j} \oplus kb_{-d+3}^{d,j} \oplus \cdots \oplus kb_{d-3}^{d,j} \oplus kb_{d-1}^{d,j}.$$

Es ist dann

$$k^n = \bigoplus_{d \geq 0} \bigoplus_{j=1}^{\lambda_d} W^{d,j} \tag{3}$$

mit $\dim W^{d,j} = d \geq 1$ für alle $d \geq 1$ und $j = 1, \dots, \lambda_d$. Um eine $\mathfrak{sl}_2(k)$-Modulstruktur auf k^n zu definieren, genügt es, auf den Unterräumen $W^{d,j}$ jeweils eine anzugeben. Hierfür wählen wir die in 1.23 beschriebene $\mathfrak{sl}_2(k)$-Modulstruktur, bezüglich der

$$\begin{aligned} h \cdot b_i^{d,j} &= i b_i^{d,j} \quad \text{für alle } i = -d+1, -d+3, \dots, d-3, d-1, \\ e \cdot b_i^{d,j} &= \begin{cases} b_{i+2}^{d,j} & \text{für } i = -d+1, -d+3, \dots, d-3, \\ 0 & \text{für } i = d-1. \end{cases} \end{aligned}$$

Inzwischen wissen wir, dass die $\mathfrak{sl}_2(k)$-Modulstruktur hierdurch bereits eindeutig bestimmt ist: Jede solche Struktur entspricht nämlich einen $\mathfrak{sl}_2$-Tripel (E, H, F) in der Lie-Algebra $\mathfrak{gl}(W^{d,j})$, wobei e auf $W^{d,j}$ durch E und h durch H wirkt. Inbesondere werden E und H bezüglich der Basis $(b_{d-1}^{d,j}, b_{d-3}^{d,j}, \dots, b_{-d+3}^{d,j}, b_{-d+1}^{d,j})$ durch die beiden $(d \times d)$-Matrizen

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} := E_d \quad \text{und} \quad H = \begin{pmatrix} d-1 & & & \\ & d-3 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -d+1 \end{pmatrix}$$

dargestellt werden. Nach Bemerkung 4.15 ist dieses $\mathfrak{sl}_2$-Tripel durch diese beiden Element bereits eindeutig bestimmt. Also ist F eindeutig bestimmt, und damit auch die Wirkung von f auf k^n.

Bemerkung 4.22. Aus [CM93, S. 34] ist bekannt, dass F bezüglich der gleichen Basis $(b_{d-1}^{d,j}, b_{d-3}^{d,j}, \dots, b_{-d+3}^{d,j}, b_{-d+1}^{d,j})$ durch die $(d \times d)$-Matrix

$$F = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ a_1 & 0 & & & \\ & a_2 & \ddots & & \\ & & & 0 & \\ & & & a_{d-1} & 0 \end{pmatrix}$$

mit $a_i = i(d-i)$ für alle $i = 1, \dots, d-1$ dargestellt wird.

Wir bezeichnen den Vektorraum k^n zusammen mit der hier konstruierten, von der Partition λ abhängigen $\mathfrak{sl}_2(k)$-Modulstruktur im Folgenden als R_λ.

Aus der $\mathfrak{sl}_2$-Theorie von Korollar 1.22 folgt zum einen, dass jede n-dimensionale Darstellung von $\mathfrak{sl}_2(k)$ isomorph zu einer Darstellung der Form R_λ mit $\lambda \in \operatorname{Par}(n)$ ist. Ist nämlich V eine beliebige n-dimensionale Darstellung von $\mathfrak{sl}_2(k)$ mit Zerlegung $V = \bigoplus_{d \geq 0} \bigoplus_{j=1}^{\mu_j} \overline{W}^{d,j}$, wobei $\dim \overline{W}^{d,j} = d$, so ist $\mu_j = 0$ für $j > n$, und $\sum_{m=1}^n m\mu_m = n$, nach dem Korollar also V isomorph zu R_μ für $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$. Aus Korollar 1.22 folgt andererseits auch, dass R_λ und R_μ für $\lambda, \mu \in \operatorname{Par}(n)$ genau dann isomorph sind, wenn $\lambda = \mu$. Zusammengefasst ist also $\{R_\lambda \mid \lambda \in \mathrm{Par}(n)\}$ ein Repräsentantensystem der n-dimensionalen Darstellungen von $\mathfrak{sl}_2(k)$. Insbesondere ist es damit ein Repräsentantensystem der Isomorphieklassen von $\mathfrak{sl}_2(k)$-Modulstrukturen auf k^n.

Zusammengefasst haben wir eine Bijektion

$$\begin{aligned} \mathrm{Par}(n) &\xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \text{Isomorphieklassen von } \mathfrak{sl}_2(k)\text{-} \\ \text{Modulstrukturen auf } k^n \end{array} \right\}, \\ \lambda &\longmapsto R_\lambda. \end{aligned}$$

4.4.3 Klassifikation der nilpotenten Orbiten in $\mathfrak{gl}_n(k)$

Über bisher konstruierten Bijektionen können wir nun die nilpotenten Orbiten in $\mathfrak{gl}_n(k)$ klassifizieren.

Für jedes $\lambda \in \mathrm{Par}(n)$ ist R_λ eine $\mathfrak{sl}_2$-Modulstruktur auf k^n, und e, h und f wirken bezüglich dieser auf k^n durch Multiplikation mit Matrizen $E_\lambda, H_\lambda, F_\lambda \in \mathfrak{gl}_n(k)$. Insbesondere bildet $(E_\lambda, H_\lambda, F_\lambda)$ ein $\mathfrak{sl}_2$-Tripel in $\mathfrak{gl}_n(k)$. Unter den Bijektion

$$\begin{aligned} \Delta(\mathfrak{gl}_n(k))/\mathrm{GL}_n(k) &\xleftrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{sl}_2(k), \mathfrak{gl}_n(k))/\mathrm{GL}_n(k) \\ &\xleftrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \text{Isomorphieklassen von } \mathfrak{sl}_2(k)\text{-} \\ \text{Modulstrukturen auf } k^n \end{array} \right\} \\ &\xleftrightarrow{\sim} \mathrm{Par}(n) \end{aligned}$$

korrespondiert R_λ genau der Konjugationsklasse dieses $\mathfrak{sl}_2$-Tripels. Bezüglich der Bijektion

$$\mathcal{N}(\mathfrak{gl}_n(k), \mathrm{GL}_n(k)) \xleftrightarrow{\sim} \Delta(\mathfrak{gl}_n(k))/\mathrm{GL}_n(k)$$

entspricht diese Konjugationsklasse dem Orbit $\mathcal{O}_{E_\lambda}$. Es ergibt sich somit eine Bijektion

$$\begin{aligned} \mathrm{Par}(n) &\xrightarrow{\sim} \mathcal{N}(\mathfrak{gl}_n(k), \mathrm{GL}_n(k)), \\ \lambda &\longmapsto \mathcal{O}_{E_\lambda}. \end{aligned}$$

Wir wollen noch einen ausgezeichneten Repräsentanten für $\mathcal{O}_{E_\lambda}$ angeben. Ist $\lambda \in k$ und $R_\lambda = \bigoplus_{d=1}^n \bigoplus_{d=1}^{\lambda_d} W^{d,j}$ die Zerlegung aus (3), so gibt es, wie bereits gezeigt, für jedes $d = 1, \dots, n$ und $j = 1, \dots, \lambda_d$ eine Basis von $W^{d,j}$, bezüglich derer die Wirkung von e auf $W^{d,j}$ durch E_d gegeben ist. Durch Zusammenfügen dieser Basen ergibt sich eine Basis von k^n, bezüglich derer die Wirkung von e auf k^n durch die Blockmatrix

$$J_\lambda := \begin{pmatrix} E_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & E_1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & E_n & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & E_n \end{pmatrix}$$

dargestellt wird, wobei E_i für alle $i = 1, \dots, d$ genau λ_i-mal vorkommt. Da die Wirkung von e auf k^n durch die Multiplikation mit E_λ gegeben ist, sind deshalb J_λ und E_λ unter $\mathrm{GL}_n(k)$ konjugiert zueinander.

Die Matrizen J_λ mit $\lambda \in \mathrm{Par}(n)$ sind also ein Repräsentantensystem der nilpotenten Orbiten in $\mathfrak{gl}_n(k)$ unter der Konjugationswirkung von $\mathrm{GL}_n(k)$.

Bemerkung 4.23. Dieses Resultat stimmt mit der üblichen Klassifikation von Konjugationsklassen nilpotenter Endomorphismen über ihre Jordannormalform überein.

Literaturverzeichnis

[CM93] David H. Collingwood and William M. McGovern. *Nilpotent orbits in semisimple Lie algebras.* Van Nostrand Reinhold Mathematics Series. Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1993.

[Hum72] James E. Humphreys. *Introduction to Lie algebras and representation theory.* Springer-Verlag, New York-Berlin, 1972. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 9.

[TY05] Patrice Tauvel and Rupert W. T. Yu. *Lie algebras and algebraic groups.* Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2005.